Filosofía sintética
de las matemáticas
contemporáneas

Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas

Fernando Zalamea

Primera edición, 2009
ISBN 978-958-719-206-3

Diseño de la Colección Obra Selecta
Marco Aurelio Cárdenas, profesor Facultad de Artes, sede Bogotá
Revisión de textos
Germán Villamizar
Copiedición
Germán Villamizar
Diagramación electrónica
Martha Echeverry Perico
Preparación editorial e impresión
Editorial Universidad Nacional de Colombia
direditorial@unal.edu.co

Bogotá, Colombia

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Zalamea Traba, Fernando,1959-
Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas / Fernando Zalamea. – Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2009
234 p.

ISBN : 978-958-719-206-3

1. Filosofía de las matemáticas 2. Teoría del conocimiento 3. Lógica

CDD-21 510.1 / 2009

La poesía apunta a los enigmas de la naturaleza e intenta resolverlos por la imagen; la **filosofía** apunta a los enigmas de la razón e intenta resolverlos por la palabra.

Goethe, *Fragmentos póstumos*

Todo lo que denominamos invención, descubrimiento en el sentido más elevado del término es la aplicación significativa y la puesta en práctica de un sentimiento de la verdad muy original que, tras un período de formación largo y secreto, conduce inesperadamente, con la rapidez del rayo, a alguna intuición fecunda. [...] Es una **síntesis** de mundo y espíritu que ofrece la certidumbre más excelsa de la eterna armonía de la existencia.

Goethe, *Los años de peregrinaje de Wilhelm Meister* (1829)

Los **matemáticos** son un poco como los franceses: cuando se les dice algo, lo traducen a su lengua y al punto pasa a ser otra cosa.

Goethe, *Fragmentos póstumos*

Lo más importante sigue siendo, no obstante, lo **contemporáneo**, porque es lo que más nítidamente se refleja en nosotros, y nosotros en él.

Goethe, *Cuadernos de morfología* (1822)

Contenido

0. Introducción

Alternativas tradicionales de la filosofía matemática y prospecto de este ensayo

Aprovechando las cuatro máximas de Goethe que hemos puesto en epígrafe, quisiéramos explicitar aquí el enfoque general de esta *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Los cuatro términos del título tienen para nosotros ciertas orientaciones bien definidas: "filosofía" apunta al ejercicio reflexivo de la razón sobre la razón misma, "sintética" al entorno relacional conjuntivo de la creación matemática y de una realidad velada con la que la invención se contrasta, "matemáticas" al ámbito amplio de las construcciones aritméticas, algebraicas, geométricas o topológicas, allende meros registros lógicos o conjuntísticos, "contemporáneas" al espacio del conocimiento elaborado a grandes rasgos entre 1950 y hoy en día. Por supuesto, estas acotaciones indican de inmediato lo que este ensayo *no es*: de entrada, *no consiste* en un tratado sobre "filosofía analítica de los fundamentos de la matemática en la primera parte del siglo XX". Dado que la enorme mayoría de los trabajos de filosofía matemática (*capítulo 2*) se reducen exclusivamente a esta última subrama entrecomillada, puede resaltarse tal vez el interés de un ensayo como este, cuyo espectro de visión resulta ser casi *ortogonal* al usualmente tratado en las reflexiones sobre el pensamiento matemático.

Cuatro tesis centrales pretenden defenderse en estas páginas. La primera postula que la conjunción "matemáticas contemporáneas" merece revisarse con sumo detenimiento, y que los modos de hacer de las matemáticas avanzadas no pueden ser reducidos (*capítulos 1, 3*) ni a los modos de la teoría de conjuntos y de la lógica matemática ni a los modos de las matemáticas elementales. En esa revisión, esperamos introducir al lector en un muy *ancho espectro de realizaciones matemáticas en el ámbito contemporáneo*, a las cuales no ha podido tener usualmente acceso. La segunda tesis señala que, al mirar realmente *lo que está sucediendo*, al menos en parte, dentro de las matemáticas contemporáneas (*capítulos 4-7*), resulta casi forzoso ampliar el rango de nuestra mirada y descubrir *nuevas problemáticas* en juego que no se encuentran en las corrientes "normales" o "tradicionales" de la filosofía de la matemática (*capítulos 2, 3*). La tercera tesis propone que un giro hacia un entendimiento *sintético* de las matemáticas (*capítulos 3, 8-11*) –sostenido, en buena medida, en la teoría matemática de categorías (*capítulos 3-7*)– permite observar importantes *tensiones dialécticas* en la actividad matemática, que se desdibujan, y llegan a veces a borrarse del todo, desde la comprensión analítica usual. La cuarta tesis indica que merece restablecerse un vivo *vaivén pendular entre creatividad matemática y reflexión crítica* –indispensable en Platón, Leibniz, Pascal o Peirce–, y que, por un lado, múltiples construcciones actuales de la matemática otorgan útiles perspectivas originales para ciertas problemáticas previas de la filosofía (*capítulos 8-11*), mientras que, por otro lado, algunos *insolubilia* filosóficos de fondo siguen impulsando *grandes esfuerzos creativos* en la matemática (*capítulos 3-7, 10*).

Los métodos utilizados en el trabajo incluyen una *descripción* de un peculiar estado de cosas ("matemáticas contemporáneas", *capítulos 4-7*), una *reflexión* sobre esa descripción ("filosofía sintética", *capítulos 1, 3, 8-11*) y una *contrastación* de esa doble descripción y reflexión con otras vertientes relacionadas ("filosofía matemática", teoría de la cultura, creatividad, *capítulos 2, 8-11*). Confiamos en haber explicitado siempre las hipótesis que subtienden esas descripciones, reflexiones y contrastaciones. Puede señalarse aquí que el ejercicio central al que se ha abocado nuestra mirada ha consistido en intentar observar los movimientos matemáticos *desde sí mismos*, y que el filtro de reorganización cultural de esa mirada ha sido solo articulado *a posteriori*, para intentar reflejar lo más fielmente posible esos complejos, y a menudo elusivos, movimientos de la matemática.

Los problemas que las matemáticas han planteado a la reflexión filosófica han sido siempre variados y complejos. Desde los inicios de ambas disciplinas en el mundo griego, los avances de la técnica matemática han dado lugar permanentemente a consideraciones filosóficas fundamentales. El privilegiado lugar *fronterizo* de la matemática –fluctuante urdimbre intermedia entre lo posible (hipótesis), lo actual (contrastaciones) y lo necesario (demostraciones), puente entre la inventividad humana y un mundo real independiente– ha generado todo tipo de posicionamientos alternativos acerca de lo que "es" la matemática, cuáles son sus objetos y cómo son sus modos de conocer. El *"qué" ontológico*, a la búsqueda de los objetos que estudia la matemática, y el *"cómo" epistemológico*, atento a las formas en que deben observarse esos objetos, dominan actualmente el panorama de la filosofía de las matemáticas (cuadrado de Shapiro, *figura 1*). Curiosamente, el *"cuándo"* y el *"por qué"*, gracias a los cuales la filosofía matemática podría ligarse de una manera más plena con perspectivas históricas y fenomenológicas (*capítulos 10, 11*), se han atenuado mucho en el horizonte, al menos en el espectro anglosajón. Sin embargo, se trata de una situación que no puede ser sino pasajera, pues no parecen existir razones intrínsecas de fondo para reducir la filosofía de las matemáticas a la filosofía del lenguaje matemático. Todo apunta más bien a un espectro mucho más amplio de *prácticas pendulares e irreducibles entre imaginación, razón y experiencia*, según las cuales la evolución conceptual de la disciplina se alzaría más allá de las sofisticadas discusiones gramaticales que ha venido fomentando el análisis del lenguaje.

Los problemas tradicionales de la filosofía matemática se han dividido alrededor de algunas grandes dualidades que han ido jalonando incesantemente el desarrollo de la reflexión filosófica. Tal vez el *quid* ineludible de toda la problemática radique en el hondo sentimiento de asombro y maravilla que ha producido siempre la "irrazonable aplicabilidad" de las matemáticas al mundo real. ¿Cómo pueden las matemáticas, extraordinaria inventiva humana, permitir un conocimiento tan preciso del mundo externo? Las respuestas han sido numerosas, cuidadosamente argumentadas y, a menudo, convincentes. Por un lado, el *realismo ontológico* ha postulado que los objetos que estudia la matemática (sean los que sean: ideas, formas, espacios, estructuras, etc.) yacen en el mundo real, independientemente de nuestra mirada, mientras que el *idealismo ontológico* ha sugerido que los objetos matemáticos son solo construcciones mentales. Una postura realista simplifica entonces nuestro supuesto acceso a lo real, pero impone una fuerte coacción sobre el mundo (orden existencial, formal, estructural, etc.); una postura idealista descarga en cambio al mundo, lo alivia de tener que contar con dudosos esqueletos ordenados, pero se enfrenta de lleno al problema de la aplicabilidad de las matemáticas. Por otro lado, el *realismo epistemológico* ha postulado (independientemente de cualquier toma de posición ontológica) que el conocimiento matemático no es arbitrario y que sus valores de verdad son índices de cierta estabilidad real, mientras que el *idealismo epistemológico* ha considerado que los valores de verdad son meras mediaciones construidas por el hombre, que no tienen por qué apoyarse en ningún correlato real. Una postura idealista asegura de nuevo una mayor plasticidad, con mejores posibilidades de acceso a la imaginación matemática, pero con serias dificultades al enfrentarse al entronque de lo imaginario y lo real; una postura realista ayuda a entender el éxito material del pensamiento matemático, pero enrigidece la libertad creativa del matemático.

Introducción
Alternativas tradicionales de la filosofía matemática y prospecto de este ensayo

Entrelazadas con estas primeras polaridades básicas, otras importantes dualidades tradicionales se han encontrado siempre en el foco de la filosofía matemática. La *necesidad* o la *contingencia* de la matemática, la *universalidad* o la *particularidad* de sus objetos y de sus métodos, la *unidad* o la *multiplicidad* del pensamiento matemático, la *internalidad* o la *externalidad* de la disciplina, la *naturalidad* o la *artificialidad* de sus construcciones han contado con los más variados defensores y detractores. El estatuto de las correlaciones de física y matemáticas ha dependido constantemente de ciertas tomas de posición (conscientes o inconscientes) con respecto a las alternativas anteriores. En los extremos opuestos del péndulo podrían situarse, por ejemplo, una matemática necesaria, universal, una, natural, muy cercana a posiciones fuertemente realistas, y una matemática contingente, particular, múltiple, artificial, más cercana a extremos idealistas. Pero el *amplísimo rango intermedio* entre esas oscilaciones del péndulo es, en el fondo, el que merece ser observado con el mayor cuidado[1]. Uno de los objetivos centrales de este trabajo consiste en intentar demostrar que –más allá de un alternar binario sí/no– algunas *mixturas* son *imprescindibles* para poder obtener una cabal comprensión del hacer matemático, *tanto* en su estructuración general, global, *como* en muchas de sus muy detalladas construcciones particulares, locales.

En su excelente monografía *Thinking about Mathematics*, Shapiro ha aprovechado algunas de las dualidades anteriores para trazar un brillante panorama de la filosofía actual de las matemáticas[2]. Restringiéndose al mundo anglosajón[3], Shapiro logra clasificar algunos trabajos prominentes gracias a sus diversas posturas realistas o idealistas (*figura 1*, basada en el texto de Shapiro[4]):

		EPISTEMOLOGÍA	
		realismo	*idealismo*
ONTOLOGÍA	*realismo*	Maddy Resnik Shapiro	Tennant
	idealismo	Chihara Hellman	Dummett Field

Figura 1. *Tendencias contemporáneas en filosofía de la matemática, según Shapiro*

Independientemente de los detalles diferenciales de los trabajos incluidos en el cuadrado anterior –con algunos de los cuales contrastaremos los resultados de nuestras pesquisas en la tercera parte de este ensayo–, nos interesa resaltar aquí la *bi-partición* elaborada por Shapiro. No hay lugar

---

1 Un excelente panorama de conjunto de esa explosión plural de *filosofías* de la matemática se presenta en Gabriele Lolli, *Filosofia della matematica. L'ereditá del novecento*, Bologna: il Mulino, 2002. Lolli detecta al menos catorce corrientes distintas (nominalismo, realismo, platonismo, raigambre fenomenológica, naturalismo, logicismo, formalismo, raigambre semiótica, constructivismo, estructuralismo, deductivismo, falibilismo, empirismo, esquematismo), además de una "filosofía espontánea" de los matemáticos.

2 Stewart Shapiro, *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2000.

3 La restricción no es, sin embargo, explícita, y Shapiro comete el común pecado anglosajón de creer que aquello que no ha sido publicado en inglés no forma parte del panorama del conocimiento. La identificación de "conocimiento" con "publicación en inglés" ha dejado por fuera de la filosofía matemática al que, a nuestro entender, es tal vez el *mayor* filósofo de las "matemáticas reales" del siglo XX: Albert Lautman. Para una discusión de las "matemáticas reales" (Hardy, Corfield) y de la obra de Lautman, véanse los *capítulos 1-3*.

4 S. Shapiro, *Thinking about Mathematics*, op. cit., pp. 32-33. Shapiro llama *realism in truth-value* la visión de que "los enunciados matemáticos tienen valores de verdad objetivos, independientes de las mentes, lenguajes, convenciones, y demás, de los matemáticos" (ibíd., p. 29). Para simplificar, denominamos aquí "realismo epistemológico" a ese *realism in truth-value*.

en el diagrama para una posición ontológica *intermedia* entre realismo e idealismo, ni para una *mixtura* epistemológica entre ambas polaridades. ¿Es esto así porque tales mediaciones son filosóficamente inconsecuentes o inconsistentes, o sencillamente porque se eliminan para esquematizar "mejor" cierto panorama? Una de nuestras contenciones en este ensayo consiste en mostrar que esas mediaciones no solo son consistentes desde un punto de vista filosófico (siguiendo a Platón, Peirce y Lautman; *capítulo 3*), sino también *imprescindibles* desde el punto de vista de la matemática contemporánea. El cuadrado de Shapiro resulta entonces ser solo un límite ideal binario de un estado real de cosas mucho más complejo[5]; muchas nuevas casillas aparecen entonces en un cuadrado extendido, al abrirlo a fronteras *terceras*.

El celebrado *dilema de Benacerraf* se presenta también por medio de una alternativa dual: *o* adoptamos coherentemente un realismo a la vez ontológico y epistemológico, y entonces nos enfrentamos con arduos problemas acerca de cómo conocer objetos matemáticos que no proceden de nuestra invención, pero que tampoco podemos percibir experimentalmente en la naturaleza, *o* adoptamos una más flexible epistemología idealista, y entonces nos enfrentamos con otros problemas igualmente arduos al investigar el hondo acorde entre las matemáticas y el mundo externo. Sin embargo, el dilema *o...o...* no tendría por qué ser considerado como tal si se tuvieran en cuenta otras posiciones intermedias entre el realismo y el idealismo. De hecho, creemos que toda la *matemática* provee iluminadores ejemplos de mediaciones entre configuraciones reales e ideales, desde los más variados y complementarios puntos de vista (*capítulos 1, 4-7*). El dilema de Benacerraf debe ser considerado con cuidado, como lo ha sido a menudo, *desde* perspectivas *clásicas* y dualistas; sin embargo, desde una metalógica más amplia, atenta a la evolución dinámica de las matemáticas –con progresivas ósmosis y transferencias entre lo real y lo ideal–, el dilema se derrumba por sí solo, puesto que ya no hay que adoptar exclusiones duales del tipo *o...o...* (*capítulos 8, 9*).

Es importante señalar aquí que merece dudarse del valor que puedan tener una ontología y una epistemología fijadas por adelantado, adoptadas *a priori* antes de observar el universo matemático, y que pretendan imponer sobre él ciertas rígidas particiones. A menudo, esa adopción de unos supuestos filosóficos previos a la visión misma del mundo matemático ha limitado la mirada y ha dado lugar a la percepción de una matemática rígida, estática, eterna, que poco o nada tiene que ver con la matemática *real* que sigue produciéndose cada día. Una matemática viva, en incesante evolución, debería considerarse en cambio como *presupuesto* básico para cualquier consideración filosófica *posterior*. El estudio de las continuidades, obstrucciones, transferencias e invarianzas de ese *hacer matemático*

5 Así como, en forma similar, la lógica clásica debe en realidad entenderse como *límite ideal* de la lógica intuicionista. Véanse los resultados de Caicedo discutidos en el *capítulo 8*.

debería ser entonces –y solo entonces– objeto de reflexiones filosóficas. La elaboración de una ontología y una epistemología *transitorias*, que se acoplen mejor al incesante *tránsito* de las matemáticas, está a la orden del día[6]. La inigualable fortaleza de las matemáticas yace precisamente en su excepcional capacidad *proteica*, una notable riqueza transformativa que rara vez ha sido bien asimilada filosóficamente.

Uno de los problemas tradicionales que ha debido afrontar, a este respecto, la filosofía matemática consiste en el lugar general de la matemática dentro de la cultura como un todo. Una lectura dualista lleva también aquí a problemas inmediatos: si la matemática se entiende como fragua evolutiva, dentro de la *contingente* creatividad humana[7], surge el problema de cómo explicar su aparente carácter *necesario* y su estabilidad acumulativa; si, en cambio, la matemática se entiende como el estudio de ciertas formas y esquemas[8] independientes de su entorno cultural, surge el problema de cómo explicar el marcado carácter histórico de los "descubrimientos" matemáticos. En la práctica, un *camino medio* entre ambas opciones parece mucho más ajustado a la realidad del hacer matemático (véanse, particularmente, las consideraciones de Grothendieck en el *capítulo 4*): un hacer fluctuante, evolutivo, lleno de *posibilidades* nuevas, procedentes de ámbitos culturales dispares, pero que siempre consigue construir precisos *invariantes* para la razón, detrás de las múltiples obstrucciones relativas que va encontrando la imaginación matemática. Un tirante vaivén entre ciertos ámbitos de posibilidades puras y ciertos invariantes necesarios, dentro de contextos bien definidos, impulsa *tanto* la creatividad matemática, *como* su normalización posterior.

La matemática no puede entenderse sin ese *ir y venir* entre obstrucciones e invariantes, y el querer *reducir a priori* el hacer matemático a uno de los dos lados de la balanza es tal vez uno de los mayores errores de fondo de algunas filosofías de la matemática. El *tránsito* entre lo posible, lo actual y lo necesario es una fortaleza *específica* de la matemática que no puede ser obviado. El considerar ese tránsito como una debilidad, y el intentar entonces eliminarlo, reduciéndolo *o* a ámbitos contingentes, *o* a ámbitos necesarios (otra versión de una exclusión *o...o...*), es una desafortunada consecuencia de tomar partido previamente, *antes* de observar el complejo universo modal de las matemáticas. De hecho, como confiamos mostrarlo en la tercera parte de este ensayo, basándonos en los estudios de caso de la segunda parte, en matemáticas son tan indispensables el descubrimiento (de esquemas estructurales necesarios) *como* la invención (de lenguajes y modelos posibles). El tirante vaivén matemático entre lo real y lo ideal

---

6 Alain Badiou explora la idea en su *Court traité d'ontologie transitoire*, París: Seuil, 1998. La tercera parte de este estudio incursiona algo más en esa "filosofía transitoria" que, creemos, requiere la matemática.

7 Es el caso, por ejemplo, de Raymond L. Wilder, *Mathematics as a Cultural System*, Oxford: Pergamon Press, 1981.

8 Michael Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Oxford University Press, 1997.

no puede ser reducido a una sola de sus polaridades, y merece, por tanto, observarse desde una conjunción de puntos de vista filosóficos complementarios. Creemos que cualquier reducción, o toma previa de partido, impide sencillamente contemplar las especificidades del tránsito matemático.

Tanto Wilder como Resnik, por señalar solo una polaridad complementaria, tienen mucho qué ofrecernos. Una hipótesis (*capítulo 1*), un programa (*capítulo 3*) y unos detallados estudios de caso (*capítulos 4-7*) nos prepararán a los esbozos de síntesis (*capítulos 8-11*) en que diversos aspectos centrales de perspectivas complementarias como las de Wilder y Resnik pueden llegar a "pegarse" en un todo unitario. Podemos señalar que una de las motivaciones esenciales de fondo de este trabajo es el deseo de elaborar, para la reflexión sobre las matemáticas, una suerte de *haz* que permita reintegrar y "pegar" ciertos puntos de vista filosóficos complementarios. Como queda patente en la segunda parte del trabajo, la noción de *haz matemático* es probablemente el concepto demarcador fundamental desde el cual empiezan a elaborarse con nuevo ímpetu las matemáticas contemporáneas –con todas sus extraordinarias herramientas de estructuración, geometrización, pegamiento, transferencia y universalización–, y resulta por tanto *natural* el intentar mirar las matemáticas *desde un haz de perspectivas filosóficas igualmente complejo*. Tendremos, por consiguiente, que ir delimitando ciertas "condiciones de coherencia" entre perspectivas filosóficas complementarias (*capítulos 1, 3*) para proceder luego a ciertos esbozos de "hacificación" o de "síntesis estructural" (*capítulos 8-11*).

Agradecimientos

A Pierre Cassou-Noguès, Marco Panza y José Ferreirós, quienes con su invitación a Lille 2005 me ayudaron a constatar el lugar crucial de la filosofía continental para una mejor comprensión de las matemáticas avanzadas, así como a definir el eventual interés singular de esta monografía dentro de un campo de estudios bastante aplanado por la filosofía analítica. A Carlos Cardona, quien con su brillante tesis doctoral sobre Wittgenstein y Gödel me incitó a contradecirle, dando lugar así a uno de los gérmenes firmes de este trabajo. A mis estudiantes de Lógica IV (2006), quienes soportaron estoicamente algunos de los embates más abstractos de este texto cuando se encontraba en gestación. A los colegas y participantes en mi Seminario de Filosofía Matemática, cuyas críticas propositivas dieron lugar a varias líneas de pensamiento aquí consignadas. A Juan José Botero, quien con su invitación a exponer como ponente plenario en el Primer Congreso Colombiano de Filosofía (2006) me abrió un inusitado espacio, que otros colegas (matemáticos, filósofos, estudiosos de la cultura) cuidadosamente ignoran. A Andrés Villaveces, quien aportó notables precisiones en el curso de la escritura del texto y me apoyó incondicionalmente con su siempre magnífico entusiasmo. A Xavier Caicedo, quien produjo una profunda y

reconfortante reseña de la monografía, en apoyo a mi candidatura (no exitosa) al Premio de Ensayo Científico Esteban de Terreros (2008). A Javier de Lorenzo, cuya amistad y generosidad estuvieron muy cerca de colocar este texto en una improbable editorial comercial de su país. A Alexander Cruz, Magda González, Epifanio Lozano, Alejandro Martín y Arnold Oostra, quienes corrigieron diversos gazapos y mejoraron varios párrafos del trabajo. Finalmente, a la Editorial Universidad Nacional, que me ha otorgado la oportunidad de integrar, por concurso, su bella colección *Obra Selecta*.

Primera Parte

El entorno general de las matemáticas contemporáneas

Capítulo 1

Especificidad de las matemáticas modernas y contemporáneas

Es bien conocido el auge actual que viven las matemáticas. Cálculos conservadores indican que en las últimas tres décadas se han producido *muchos* más teoremas en la disciplina que en toda su historia previa, con más de dos mil años de duración (incluidos los muy fructíferos siglos XIX y XX, hasta los años de 1970). Los grandes conceptos novadores de la matemática moderna –debidos a Galois, Riemann e Hilbert, por solo citar las tres figuras fundadoras mayores– se han multiplicado y enriquecido gracias a los aportes de toda una pléyade de matemáticos excepcionales en los últimos cincuenta años. Las pruebas de resultados aparentemente inabordables –como el teorema de Fermat o la conjetura de Poincaré– se han conseguido, para sorpresa de la misma comunidad matemática, gracias al tesonero esfuerzo de matemáticos que han sabido aprovechar cuidadosamente los hondos avances previos de sus colegas. El auge de publicaciones y revistas matemáticas parece imparable, con toda una floreciente "industria" académica en el trasfondo; aunque el número excesivo de publicaciones puede llevar a demeritar su calidad y se sugiere con algo de sorna que, en vez de fomentarse, estas deberían penalizarse, la inmensa viveza de la matemática se muestra en la actividad frenética de las casas editoriales. A su vez, las relaciones de las matemáticas con la física se encuentran de nuevo en un momento de gracia, con enlaces profundos alrededor de las supercuerdas, cuantizaciones y modelos cosmológicos complejos.

Sin embargo, curiosamente, en la *filosofía de las matemáticas* la verdadera *explosión* de las matemáticas en los últimos cincuenta años rara vez es tomada en cuenta (*capítulo 2*). Esto puede deberse a dos clases de razones: primero, el considerar que, a pesar de que las matemáticas avancen y evolucionen, sus *tipos* de objetos y de métodos se mantienen invariables; segundo, el cerrar sencillamente la mirada a las nuevas técnicas y a los nuevos resultados, debido a una cierta incapacidad profesional para observar las nuevas temáticas en juego. De hecho, en la práctica, las dos tendencias parecen *retroalimentarse* entre sí; por un lado, la convicción de que la filosofía de las matemáticas ya tiene suficiente material con la teoría de conjuntos (y con variantes de la lógica de primer orden) ayuda a que no se intente adentrar la mirada en otros entornos del saber matemático; por otro lado, la dificultad que conlleva enfrentarse a los avances de la *matemática moderna* (mediados del siglo XIX-mediados del siglo XX), y, *a fortiori*, a los avances de la *matemática contemporánea* (mediados del siglo XX-hoy), logra obviarse detrás de la supuesta invariabilidad ontológica y epistemológica de la disciplina. El dejar deliberadamente de observar el panorama (técnico, temático, creativo) de la disciplina es una situación que podría considerarse *escandalosa* en la filosofía de otras disciplinas científicas[9], pero que en la filosofía de las matemáticas parece poder sobrellevarse con taxativa seguridad y sin el menor pudor.

Dos grandes extrapolaciones –a nuestro modo de ver equivocadas, como intentaremos demostrarlo a lo largo de este ensayo– sostienen la idea, ubicua en filosofía de las matemáticas, de que es *innecesario* observar los avances en curso de la disciplina. Por un lado, se considera que los objetos y los métodos de las *matemáticas elementales* y de las *matemáticas avanzadas* no difieren esencialmente entre sí; por otro lado, se presuponen un marcado cariz necesario y un trasfondo absoluto en el desarrollo de las matemáticas. Si, desde un punto de vista ontológico y epistemológico, da lo mismo explorar el teorema de Pitágoras que el teorema de Fermat, resulta por supuesto inútil esforzarse en entender (filosóficamente) todas las herramientas de geometría algebraica y de variable compleja que abren el camino de la prueba del teorema de Fermat. Si, desde un punto de vista histórico y metafísico, se considera que la evolución de las matemáticas no da lugar a nuevos tipos de "entes", resulta igualmente absurdo pretender fijarse en las complejidades de la creatividad matemática contemporánea. Sin embargo, creemos que esos dos supuestos ubicuos –no distinguir matemáticas elementales y avanzadas; no asumir una dualidad de tránsitos e invarianzas en matemáticas– valen solo *parcialmente*, en contextos restrictivos determinados, y consideramos que extrapolar esos supuestos al conjunto "real" de las matemáticas (y, en particular, a las matemáticas contemporáneas) constituye un profundo error metodológico.

Siguiendo a David Corfield[10], llamaremos matemáticas "reales" a la urdimbre de conocimientos matemáticos avanzados con los que diariamente se enfrentan los matemáticos en su *trabajo*, una urdimbre que puede considerarse perfectamente *real* desde diversos puntos de vista: como objeto de estudio estable por una amplia comunidad, como conjunto

---

9 Una filosofía de la física que no tenga en cuenta los avances *técnicos* de la física sería, por ejemplo, impensable. Bernard d'Espagnat, *Le réel voilé. Analyse des concepts quantiques*, París: Fayard, 1994, realiza por ejemplo un admirable estudio filosófico de la física cuántica, en el que se observan con cuidado los notables avances técnicos de la disciplina, y en el que se demuestra que, para entender la física cuántica, inevitablemente se requieren *nuevos* enfoques ontológicos y epistemológicos, *adaptados* a los nuevos objetos y métodos de conocimiento.

10 David Corfield, *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003. Como Corfield lo señala, Hardy, en su polémica "apología de un matemático", llamaba "real mathematics" a la matemática construida por figuras como Fermat, Euler, Gauss, Abel o Riemann (G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge: Cambridge University Press, 1940, pp. 59-60; citado en Corfield, op. cit., p. 2).

de saberes con una influencia visible en la práctica de la disciplina, como entramado susceptible de contrastarse efectivamente con el mundo físico. Tanto las matemáticas elementales como la teoría de conjuntos, objeto de extensas consideraciones en la filosofía analítica, son solo entonces un fragmento muy reducido de las matemáticas "reales". Estas se desarrollan considerablemente a lo largo del ámbito de las *matemáticas clásicas* (mediados del siglo XVII-mediados del siglo XIX), pero, en un vistazo de conjunto (*figura 2*), debe observarse que las matemáticas modernas y contemporáneas constituyen ampliamente en estos momentos el núcleo de la disciplina. Consideramos un *supuesto básico*, no suficientemente apreciado, el hecho de que percibir con mayor fidelidad y precisión técnica la *totalidad* de la producción matemática puede resultar de gran relevancia para la filosofía.

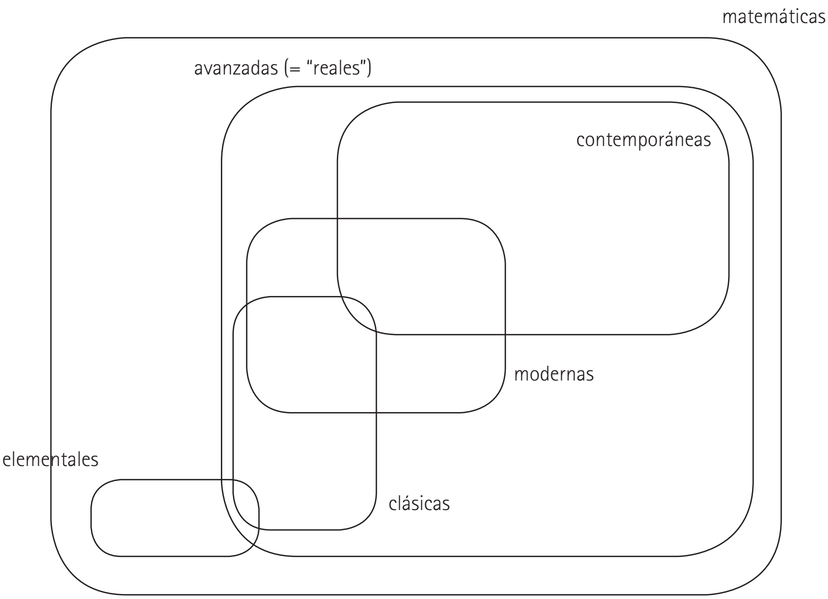

Figura 2. ***Correlaciones entre ámbitos de la matemática: elementales, clásicas, avanzadas, modernas, contemporáneas***

Los linderos que permiten distinguir los ámbitos anteriores son claramente históricos, pues la investigación matemática de punta *acumula complejidad* a lo largo de su evolución. Sin embargo, los linderos pueden también asociarse a cierto tipo de herramientas matemáticas, introducidas por grandes matemáticos, cuyos nombres sirven también para caracterizar cada época:

- matemáticas clásicas (mediados del siglo XVII–mediados del siglo XIX): uso sofisticado del infinito (Pascal, Leibniz, Euler, Gauss)

- matemáticas modernas (mediados del siglo XIX–mediados del siglo XX): uso sofisticado de propiedades estructurales y cualitativas (Galois, Riemann, Hilbert)
- matemáticas contemporáneas (mediados del siglo XX–hoy): uso sofisticado de propiedades de transferencia, reflexión y pegamiento (Grothendieck, Serre, Shelah).

En particular, dentro de las matemáticas modernas se acumula una enorme cantidad de saberes que evolucionan y que conforman el cuerpo actual de las matemáticas: teoría de conjuntos y lógica matemática, teorías analítica y algebraica de números, álgebras abstractas, geometría algebraica, funciones de variable compleja, medida e integración, topología general y algebraica, análisis funcional, variedades diferenciales, teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, etc.[11] Aunque una serie de notables teoremas matemáticos ha logrado demostrar que *cualquier* construcción matemática puede representarse dentro de una adecuada teoría de conjuntos (y que la enorme mayoría de las matemáticas puede representarse dentro de la teoría Zermelo-Fraenkel con lógica clásica de primer orden subyacente), es igualmente claro, dentro de la práctica matemática, que esos "calcos" solo tienen un valor lógico, *muy alejado* de su verdadero *valor matemático*. Creemos que el hecho de que las construcciones matemáticas puedan reducirse teóricamente a construcciones conjuntistas ha actuado como otro soporte más para que, en filosofía de las matemáticas, haya podido evitarse durante tanto tiempo una mirada más comprometida con las "matemáticas reales". Sin embargo, como pronto veremos, las *estructuras* en juego y los *modos de hacer* dentro de la teoría de conjuntos y dentro de otros entornos matemáticos son muy diversos, y, por consiguiente, deben ser también diversas la ontología y la epistemología planteadas (por no hablar aún de historia o de "metafísica", *capítulos 10, 11*). La *posibilidad* de poder reducir la demostración de un complejo teorema matemático a una serie de enunciados puramente conjuntistas (una *potencialidad* solo existente en teoría y nunca ejecutada en la práctica, apenas se cruzan ciertos umbrales sencillos) se ha visto llevada en la filosofía de las matemáticas a una falaz extrapolación, que ha permitido que ciertas perspectivas filosóficas rehuyan una mirada a la *actualidad* de las "matemáticas reales", allende la lógica matemática o la teoría de conjuntos.

Los entornos de las matemáticas avanzadas, ya bien delimitados a mediados del siglo XX, tuvieron en Albert Lautman a un filósofo de excepción[12]. Para Lautman, la matemática –más allá de su reconstrucción

---

11 La *Mathematics Subject Classification 2000* (MSC 2000) incluye unas *sesenta* entradas principales en un árbol que luego se ramifica muy rápidamente. Señalamos arriba solo algunas de las entradas iniciales *indispensables* del árbol.

12 La obra de Albert Lautman (1908-1944) merece entenderse como la más incisiva obra filosófica del siglo XX que se detiene en las *matemáticas modernas*, y que busca dibujar los mecanismos ocultos de la creatividad matemática avanzada, así como sintetizar los enlaces *estructurales y unitarios* del saber matemático. Los escritos de Lautman, olvidados y poco comprendidos en su momento, resurgen con una nueva edición francesa (Albert Lautman, *Les mathématiques, les Idées et le Réel physique*, París: Vrin,

conjuntista *ideal*– se jerarquiza en entornos *reales* de muy diversa complejidad, donde se entrelazan los conceptos y los ejemplos gracias a procesos en los que lo *libre* y lo *saturado* se contraponen estructuralmente, y en los que, gracias a la mediación de los *mixtos*, surgen muchas de las mayores creaciones matemáticas. Al adentrarse en el amplio conglomerado de las matemáticas de su época, Lautman puede detectar algunos rasgos *específicos* de las matemáticas avanzadas[13], que *no se dan* en las matemáticas elementales:

- *(i)* *compleja jerarquización* de las diversas teorías matemáticas, irreducibles entre sí relativamente a sistemas intermedios de deducción;
- *(ii)* *riqueza* de modelos, irreducibles a meras manipulaciones lingüísticas;
- *(iii)* *unidad* de métodos estructurales y de polaridades conceptuales detrás de la anterior multiplicidad efectiva;
- *(iv)* *dinámica* del hacer matemático, contrastado entre lo libre y lo saturado, atento a la división y a la dialéctica;
- *(v)* *enlace teoremático* de lo que es múltiple en un nivel con lo que es uno en otro nivel, por medio de mixtos, ascensos y descensos.

Las matemáticas elementales –punto de mira privilegiado de la filosofía analítica– merecen contraponerse con las teorías matemáticas avanzadas que conforman el amplio espectro de las matemáticas modernas. Uno de los argumentos repetidos para poder reducir la mirada a las matemáticas elementales consiste en asegurar que todas las proposiciones matemáticas, entendidas como tautologías, son equivalentes entre sí, y que, por tanto, desde una perspectiva filosófica, basta estudiar el espectro de las proposiciones elementales. Por ejemplo, el altamente anodino “$2 + 2 = 4$” sería, desde un punto de vista lógico, equivalente al significativo y diciente teorema de Hahn-Banach (HB), puesto que ambas proposiciones son deducibles en el sistema Zermelo-Fraenkel (ZF). Sin embargo, la equivalencia tautológica “trivial” $ZF \vdash HB \leftrightarrow 2 + 2 = 4$ está lejos de agotar tanto su contenido matemático *como* su mismo estatuto lógico. La equivalencia, en efecto,

2006) y con la primera traducción completa de sus trabajos a otro idioma que no sea el francés (Albert Lautman, *Ensayos sobre la estructura y la unidad de las matemáticas modernas*, Bogotá: por aparecer). Para una presentación crítica de la obra de Lautman, puede consultarse nuestro extenso estudio introductorio a la edición en español. En el presente ensayo intentamos desarrollar en parte la obra de Lautman, y extender su rango de acción, de las matemáticas modernas (que Lautman pudo conocer) a las matemáticas contemporáneas (que yacen ahora ante nosotros).

13 Son pocas las obras críticas atentas a la multiplicidad de los haceres matemáticos avanzados, y, como émulo de la obra de Lautman, merece señalarse, en un ensayo en español como el nuestro, a Javier de Lorenzo, siempre atento a los hondos estratos y a los muy diversificados ramales de la invención matemática moderna. De sus trabajos, véanse, en particular, *Introducción al estilo matemático*, Madrid: Tecnos, 1971; *La matemática y el problema de su historia*, Madrid: Tecnos, 1977; *El método axiomático y sus creencias*, Madrid: Tecnos, 1980; *Filosofías de la matemática fin de siglo XX*, Valladolid: Universidad de Valladolid, 2000. De Lorenzo no parece conocer a Lautman y no lo menciona en sus escritos.

se derrumba de inmediato si, en vez de partir de ZF, se escogen sistemas axiomáticos *intermedios*. De hecho, las *reverse mathematics* de Friedman y Simpson[14] muestran que las proposiciones básicas de la aritmética (que, por ejemplo, estudia repetidamente Wittgenstein en sus *Lectures on the Foundations of Mathematics*[15]) se encuentran en los niveles más bajos del desarrollo matemático (dentro de un sistema RCA_0 reducido a demostrar la existencia de conjuntos recursivos), mientras que el teorema de Hahn-Banach no solo requiere herramientas más avanzadas (un sistema WKL_0 con formas débiles del lema de König), sino que es plenamente *equivalente* a ellas. En términos precisos, resulta que $RCA_0 \nvdash HB \leftrightarrow 2 + 2 = 4$, puesto que se tiene $RCA_0 \vdash HB \leftrightarrow WKL_0$, $RCA_0 \vdash 2 + 2 = 4$ y $RCA_0 \nvdash WKL_0$.

Las consecuencias de un tal estado de cosas son patentes, pero no han sido suficientemente consideradas en filosofía de las matemáticas. Primero, resulta absurdo comparar pares de proposiciones matemáticas *con respecto* a sistemas de base excesivamente potentes. *A los ojos de ZF* todas las proposiciones demostrables se trivializan lógicamente (en pares de tautologías equivalentes) no porque las proposiciones contengan en sí mismas un idéntico valor lógico (o matemático), sino porque *desde ZF* no se aprecian las diferencias. ZF es entonces una suerte de *absoluto* deductivo, tan cómodo para aquellos que observan analíticamente el universo conjuntista como para aquellos que desean restringirse únicamente a las matemáticas elementales, aunque las *franjas* intermedias de poder deductivo dentro de ZF (al estilo de los sistemas estudiados en las *reverse mathematics*) constituyan los entornos verdaderamente relevantes desde el punto de vista de las matemáticas "reales", con múltiples *jerarquías* y diferencias en las que puede realizarse un estudio matemáticamente productivo de obstrucciones y transferencias lógicas. Segundo, resulta imposible sostener la idea de una matemática tautológica, expresable plenamente por el ámbito acotado de las matemáticas elementales. Apenas se cruzan los umbrales de complejidad del sistema RCA_0 (y se pasa a un sistema ACA_0 en el cual pueden probarse los primeros resultados importantes del álgebra abstracta, como la existencia de ideales maximales en anillos conmutativos), se entra en una *red relativa* de equiconsistencias parciales donde la noción (pretendidamente estable y absoluta) de tautología pierde todo sentido matemático real. La matemática sigue produciendo teoremas necesarios, pero dentro de contextos deductivos variables, cuyas oscilaciones y cambios son fundamentales para expresar el verdadero valor matemático del teorema. Tercero, resulta inmediatamente palpable la presencia indispensable de ciertas *irreducibilidades*, lógicas y matemáticas, dentro de la disciplina. La riqueza de las matemáticas radica en sus demostraciones *en vaivén* –la imposibilidad de evadir ciertas obstrucciones y la posibilidad de efectuar

---

14 Stephen G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, New York: Springer, 1999.

15 Ludwig Wittgenstein, *Lectures on the Foundations of Mathematics* (1939), Chicago: University of Chicago Press, 1989.

ciertas transferencias–, algo que desafortunadamente desaparece desde perspectivas *extremas*: desde una perspectiva tautológica absoluta (ZF, donde todo es transferible) o desde perspectivas elementales (subsistemas de RCA_0, donde todo es obstrucción).

La *compleja jerarquización* de las matemáticas avanzadas (punto *(i)* señalado más arriba) da lugar así a una panoplia de escalas constructivas, correspondencias inversas y gradaciones de todo tipo (particularmente visibles en la teoría de Galois y en teorías generalizadas de la dualidad), que permiten estudiar con mayor *fidelidad* la emergencia de la creatividad matemática. La eclosión y la génesis de las estructuras matemáticas, vedadas en una estática aproximación analítica, resultan más visibles desde una perspectiva dinámica en la que un problema, un concepto o una construcción se *transforman* mediante las soluciones parciales del problema, las definiciones acotadas del concepto, o el haz de saturaciones y decantamientos de la construcción. En ese ámbito del pensamiento eminentemente vivo y en incesante evolución que es la matemática, una honda jerarquización no solo es imprescindible, sino *motor* mismo de creación. Cualquier filosofía de las matemáticas que deje de tener en cuenta la compleja riqueza jerárquica de las matemáticas avanzadas no solo dejará de lado así delicadas "intermitencias de la razón" (diferencias en la contrastación lógica), sino aún más finas "intermitencias del corazón" (diferencias en la creatividad matemática).

El punto *(ii)* en el que se distinguen las matemáticas modernas y las matemáticas elementales contiene también de entrada un fuerte potencial filosófico. La matemática moderna ha producido, en todos sus campos de acción, conglomerados realmente notables de modelos, extremadamente diversos y originales, con significativas distinciones estructurales. Se trata en efecto de colecciones *semánticas* que superan con mucho las más acotadas teorías sintácticas que esas colecciones ayudan a moldear, como puede verse, por ejemplo, al comparar el universo explosivo y desigual de los grupos finitos simples con la axiomatización elemental subyacente de la teoría. Las matemáticas avanzadas contienen una gran riqueza semántica, irreducible a meras consideraciones gramaticales, aunque una *extrapolación falaz* ha pretendido identificar el hacer matemático con el hacer de ciertas reglas gramaticales. En efecto, aunque desde el punto de vista de las matemáticas elementales es comprensible pretender reducir el pensamiento matemático a una gramática deductiva, ya que los modelos tienden a ser pocos y estar controlados, el extrapolar esa situación a las matemáticas "reales" ha constituido una monumental trivialización, ya que las clases de modelos pueden pasar a tener comportamientos totalmente erráticos (véase el *capítulo 5*, trabajos de Shelah). Para intentar reducir "matemática" a "gramática", se asume entonces una reducción (falaz) de "matemática" a "matemáticas elementales", y luego se aplica la identificación (plausible) de "matemáticas elementales" con reglas gramaticales finitarias.

La riqueza de la matemática moderna radica, en buena medida, en la enorme diversidad de estructuras y modelos que en el último siglo y medio se han venido construyendo (*o* descubriendo, no entramos por ahora en la cuestión, aunque creemos que *tanto* la construcción *como* el descubrimiento son imprescindibles; ver *capítulos 8, 9*). Todo tipo de estructuras surcan permanentemente el panorama actual de las matemáticas, y un claro rasgo distintivo de las matemáticas avanzadas consiste en tener que considerar *simultáneamente* múltiples estructuras en cualquier atisbo de comprensión de un fenómeno matemático. El fenómeno requiere considerarse a menudo desde puntos de vista complementarios, donde se entrecruzan muy diversas herramientas, aritméticas, algebraicas, topológicas, geométricas. Una característica fundamental de las matemáticas modernas es su capacidad de *recorrer* una multiplicidad aparentemente discordante de estructuras *aprovechando* notables instrumentarios que consiguen armonizar la diversidad[16]. Sin variedad, multiplicidad y complejidad, las matemáticas modernas no habrían podido siquiera emerger, y, como veremos, sin entrelazamiento y unidad no habrían podido consolidarse. La situación es muy distinta de aquella de las matemáticas elementales, donde las estructuras se encuentran estrictamente determinadas –los enteros, el plano real, y poco más– y, por tanto, no alcanzan a darse ni una variabilidad de los modelos ni una fluxión entre subcampos de la matemática. De nuevo, una constatación central es que, aunque al restringirse a las matemáticas elementales pueda ser viable confundir modelos y lenguaje, eliminándose así la variabilidad y la fluxión de la semántica, de inmediato esto deja de ser así dentro de las matemáticas avanzadas, donde las colecciones de estructuras (matemáticas) y las colecciones de hechos (físicos) gobiernan con firmeza el panorama, a menudo de manera independiente de cualquier consideración sintáctica o lingüística.

La riqueza multiplicativa y diferencial de la matemática moderna va acompañada de una tendencia pendular complementaria hacia lo unitario y lo integral (punto *(iii)* indicado arriba). Las tensiones dialécticas entre lo Uno y lo Múltiple han encontrado en las matemáticas modernas un fértil campo de *experimentación*. La unidad de las matemáticas se expresa no solo gracias a una base común donde se reconstruye el Todo (teoría de conjuntos), sino –ante todo– en la convergencia de sus métodos y en el *transvase* de ideas entre sus diversas redes. La penetración de los métodos del álgebra en el análisis, el análisis subordinado a la topología, la ubicua geometrización de la lógica, o el acorde estructural de la variable compleja dentro de la aritmética, conforman algunos ejemplos donde, en el detalle local, se percibe la unidad global de las matemáticas. Una profunda inversión epistemológica muestra cómo –contrariamente a lo que podría pensarse en primera instancia– una atenta observación de la diversidad práctica *permite* reintegrar luego lo uno detrás de lo múltiple. De hecho,

16 Respondiendo así al segundo epígrafe de Goethe que hemos situado al comienzo de este estudio.

una plena conciencia de la diversidad no se reduce a lo disconexo, sino retorna a la unidad, ya sea en el pragmatismo de Peirce, en el montaje de Benjamin, en el relé de Francastel o en la diferencia de Deleuze. De forma similar –y con gran precisión técnica, como veremos en los *capítulos 4 y 7*–, las matemáticas modernas buscan (y consiguen) encadenar una prolífica multiplicidad de *niveles* dentro de grandes *torres* y armazones unitarias.

Esa *reconstrucción* de lo uno detrás de lo múltiple es otro rasgo fundamental que permite separar matemáticas elementales y matemáticas avanzadas. De entrada, la matemática elemental es "una", puesto que no ha alcanzado previamente a multiplicarse o diferenciarse; la matemática avanzada, en cambio, luego de pasar por procesos creativos explosivos, ha debido reentender y reconstruir lazos y urdimbres comunes en medio de la diversidad. La fortaleza y la solidez producidas por ese doble movimiento de vaivén –diferenciación/integración, multiplicación/unificación– son virtudes *propias* de las matemáticas avanzadas, que solo muy débilmente pueden ser detectadas en las matemáticas elementales. De hecho, algunas de las grandes teorías unitarias de la matemática contemporánea –teoría generalizada de Galois, topología algebraica, teoría de categorías– se *trivializan* a nivel elemental, ya que las estructuras en juego no alcanzan a tener una suficiente riqueza diferencial, que merezca ser reintegrada luego. Es factualmente imposible, por tanto, pretender observar los mismos tipos de movimientos conceptuales al discurrir sobre sumas de palotes, o al adentrarse, por ejemplo, en la teoría de cuerpos de clases. Creemos que el no haber entendido, o no haber querido asumir, ese tipo de distinciones ha hecho bastante daño en la filosofía de las matemáticas.

Inmediatamente ligado al vaivén entre multiplicidad y unidad en las matemáticas modernas, se encuentra el ineludible dinamismo del hacer matemático (punto *(iv)*). La matemática, como se ha ido desarrollando desde mediados del siglo XIX hasta hoy, no cesa de crear nuevos espacios para el entendimiento. Un proceso pendular –donde, por una parte, se acumulan meticulosas saturaciones dentro de estructuras *particulares*, y, por otra, se desgaja el comportamiento libre de estructuras *genéricas*– permite contemplar a la vez un espectro inusitadamente preciso de obstrucciones/resoluciones locales y una serie de esquemas organizativos globales. El tránsito dinámico entre lo local y lo global es uno de los éxitos mayores de la matemática moderna, un tránsito difícil de percibir en las matemáticas elementales, donde prima una clara preponderancia de lo local. De nuevo, parece realizarse una extrapolación indebida cuando el carácter eminentemente estático, terminado, estable, "liso" de las matemáticas elementales pretende considerarse como propio de *toda* la matemática en su conjunto. Las matemáticas avanzadas son, en cambio, esencialmente dinámicas, abiertas, inestables, "caóticas". No es una casualidad, cuando se les pregunta a los matemáticos acerca del futuro de su disciplina, que casi todos dejen completamente abierto el panorama; con mil fuerzas tirando hacia diferentes lugares, la "geometría" de la creatividad matemática está repleta de singularidades y vórtices impredecibles.

El ir y venir entre diversas perspectivas (conceptuales, hipotéticas, deductivas, experimentales), diversos entornos (aritméticos, algebraicos, topológicos, geométricos, etc.) y diversos niveles de estratificación dentro de cada entorno es uno de los rasgos dinámicos fundamentales de la matemática moderna. Cuando ese "ir y venir" pendular se concreta parcialmente en urdimbres de enlaces teoremáticos, y cuando se sistematiza el tránsito de ascensos y descensos entre ciertos niveles de estratificación –con un gran arsenal de *mixtos* intermedios para *guiar* el tránsito–, nos encontramos entonces (punto *(v)*) ante otra de las peculiaridades específicas de las matemáticas avanzadas. De hecho, en bajos niveles de complejidad, como puede suceder con las matemáticas elementales, las alturas (ascenso/descenso) y las construcciones intermedias (mixtos) tienden *naturalmente* a trivializarse y desaparecer. Hay que enfrentarse, por ejemplo, con obstrucciones en sistemas infinitarios de ecuaciones lineales o en clases de ecuaciones integrales para que surja la noción de espacio de Hilbert, uno de los mixtos más incisivos de la matemática moderna, así como hay que enfrentarse con ciertas singularidades en las funciones de variable compleja para que surjan las superficies de Riemann, otra de las construcciones paradigmáticas modernas. De forma similar, la teoría de Galois, uno de los grandes puntales de desarrollo de las matemáticas, con notables transferencias conceptuales hacia los más variados dominios de la matemática, sería impensable sin haber tenido que considerar importantes obstrucciones entre redes de nociones asociadas a resoluciones algebraicas e invarianzas geométricas. Al abordar problemáticas de gran complejidad –tensadas por urdimbres dialécticas muy ramificadas– las matemáticas modernas se ven obligadas así a *combinar* múltiples perspectivas, herramientas y conocimientos, algo que rara vez sucede en ámbitos elementales.

Más allá de los puntos *(i)-(v)* que acabamos de discutir[17], y que constituyen un primer plano de separación entre las matemáticas elementales y las matemáticas modernas (mediados del siglo XIX–mediados del siglo XX, como las hemos definido), creemos que las matemáticas *contemporáneas* (1950-hoy) incorporan otros criterios adicionales que refuerzan su especificidad. *Además de conservar* las características propias de lo moderno (*(i)-(v)*)[18], las matemáticas contemporáneas aportan nuevos

17 La obra de Lautman (ver *nota 12* y *capítulo 2*) provee gran variedad de ejemplos técnicos donde se concretan las tendencias anteriores, así como otras formulaciones de los puntos *(i)-(v)*.

18 No hay, en matemáticas, ningún tipo de "quiebre posmoderno". Siguiendo a Rodríguez Magda, para caracterizar a nuestra época parece mucho más apropiado hablar de *transmodernidad* que de una dudosa "post"modernidad (Rosa Mª. Rodríguez Magda, *Transmodernidad*, Barcelona: Anthropos, 2004). En matemáticas –y, de hecho, en la cultura como un todo, como lo hemos señalado en nuestro ensayo *Razón de la frontera y fronteras de la razón*– las nociones *continuas* ligadas al tránsito y a la frontera son imprescindibles. El prefijo *trans* parece, por consiguiente, mucho más indicador de nuestra condición (*y de la condición matemática*) que un prematuro *post*.

elementos de distinción con respecto a las matemáticas elementales, entre los cuales se pueden señalar:

(vi) *impureza* estructural de la aritmética (conjeturas de Weil, programa de Langlands, teoremas de Deligne, Faltings y Wiles, etc.);
(vii) *geometrización* sistemática de todos los entornos de la matemática (haces, homologías, cobordismo, lógica geométrica, etc.);
(viii) *esquematización* y liberación de restricciones conjuntistas, algebraicas o topológicas (grupoides, categorías, esquemas, topos, motivos, etc.);
(ix) *fluxión* y deformación de los linderos usuales de las estructuras matemáticas (no linealidad, no conmutatividad, no elementalidad, cuantización, etc.);
(x) *reflexividad* de teorías y modelos sobre sí mismos (teorías de la clasificación, teoremas de punto fijo, modelos monstruo, clases elementales / no elementales, etc.).

Muchos de los trabajos novadores mayores de grandes matemáticos contemporáneos[19] pueden situarse, *grosso modo*, en las líneas anteriores, como lo sugerimos en la tabla siguiente (el orden de aparición en la tabla corresponde al orden de estudio de cada autor en la segunda parte de nuestro ensayo)[20]:

19 La selección es, inevitablemente, personal, aunque sin duda algunas de las figuras fundamentales de la matemática desde 1950 se encuentran en la lista. Incluimos en la tabla solo aquellos matemáticos que estudiaremos en la segunda parte de este ensayo. No aparecen otras figuras imprescindibles de las matemáticas contemporáneas (como Borel, Chevalley, Dieudonné, Drinfeld, Eilenberg, Gelfand, Margulis, Milnor, Smale, Thom, Thurston o Weil, por señalar solo algunos nombres) puesto que, en el mejor de los casos, solo los mencionaremos de paso, sin dedicar un apartado específico a sus trabajos.

20 Las marcas indican una *clara preponderancia* de trabajos en cada línea, y no solo incursiones que puedan considerarse acotadas con respecto al resto de la obra de cada matemático. Grothendieck se sitúa claramente por encima de todos los demás matemáticos del último medio siglo, algo que tenuemente señalan las *cinco* marcas que sirven para registrar la enorme presencia de su obra. Las demás marcas deben entenderse solo como indicativas, aunque son también adecuadamente representativas.

	(vi)	*(vii)*	*(viii)*	*(ix)*	*(x)*
Grothendieck	•	•	•	•	•
Serre	•	•	•		
Langlands	•	•	•		
Lawvere		•	•	•	
Shelah		•	•	•	•
Atiyah		•	•	•	
Lax		•		•	
Connes	•	•	•	•	
Kontsevich		•	•	•	
Freyd		•	•		•
Simpson			•		•
Gromov		•	•	•	
Zilber		•	•	•	

Figura 3. *Algunos grandes matemáticos dentro de líneas mayores de desarrollo de la matemática contemporánea*

Detrás de la mixturación aritmética (*vi*), la geometrización (*vii*), la esquematización (*viii*), la fluxión estructural (*ix*) y la reflexividad (*x*), pueden observarse algunos modos de conceptualización y construcción de las matemáticas contemporáneas que no se encontraban (o aparecían solo *in nuce*) en el periodo 1900-1950. Una primera inversión fundamental consiste en estudiar fragmentos de las matemáticas, no partiendo de descripciones axiomáticas parciales (como en el programa de Hilbert), sino de clases de estructuras correlacionadas. Tanto desde la lógica matemática –con la imparable eclosión de la teoría de modelos– como desde la matemática pura –con la teoría de categorías–, los objetos de estudio en la matemática no son tanto colecciones de axiomas y sus modelos asociados, como, desde una *perspectiva inversa*, clases de estructuras y sus lógicas asociadas (un punto de vista imprescindible para la *emergencia* de la teoría abstracta de modelos y de los cuantificadores generalizados, siguiendo a Lindström). En el caso en que la clase de estructuras es muy extensa y recorre transversalmente múltiples campos de las matemáticas (como las categorías intermedias entre categorías regulares y topos), la amplitud de la perspectiva provee a menudo nuevos teoremas globales (jerarquización sintética, delimitación de fronteras, transferencia –como en los teoremas de representación de Freyd). En el caso en que la clase surge a partir de ciertas estructuras particulares y de sus deformaciones infinitesimales (como en la cuantización), el preciso y hondo conocimiento de la clase lleva a notables avances técnicos locales (descomposición analítica, fluxión, control asintótico –como en la prueba de la conjetura de Poincaré, según Perelman). En cualquiera de los dos casos, sin embargo, la matemática *vuelve a preceder* explícitamente a la lógica. Se trata de una situación básica (ampliamente prefigurada por Peirce, sobre el cual volveremos) que, de hecho, ha seguido tal vez subsistiendo siempre en la *práctica* matemática, pero que a lo largo del siglo XX fue repetidamente velada desde perspectivas cercanas a la filosofía analítica o a la filosofía del lenguaje.

Una segunda inversión esencial consiste en la enorme capacidad de las matemáticas contemporáneas por construir incisivos avances técnicos *desde linderos* aparentemente inmanejables –clases no elementales (Shelah), geometría no conmutativa (Connes), lógica no lineal (Girard), etc.–, allende las clases de entornos normalizados que habían surgido naturalmente en la disciplina en la primera mitad del siglo XX. En vez de progresar desde un interior positivo, en el que se acumula el conocimiento, hacia un exterior negativo, en cierta forma incognoscible, la matemática contemporánea se sitúa de entrada en determinados *confines* del *no*, y procede a explorar constructivamente, desde esas fronteras, nuevos y asombrosos territorios. Una tercera inversión consiste en considerar los *mixtos* matemáticos, no como entes intermedios útiles en una deducción, sino como entes propios, iniciales, donde se juega realmente la construcción de la disciplina. No hay espacio de las matemáticas contemporáneas que no se encuentre atravesado por las técnicas más diversas; la condición mediadora (*trans*), que en la primera parte del siglo XX podía verse como etapa en un camino demostrativo, tiende a convertirse actualmente en la condición central misma de la disciplina. La extraordinaria *combinación* de estructuración aritmética, geometrización algebraica, esquematización, fluxión y reflexividad en la obra de Grothendieck es un ejemplo privilegiado en el que todas las herramientas se dirigen justamente a controlar el *tránsito* de ciertas concepciones matemáticas globales a lo largo de un enorme espectro de entornos locales.

Debe notarse que, en todos los casos, las oscilaciones y las inversiones señaladas no se dan en las matemáticas elementales ni pueden darse en sus acotados campos de acción. Además, aun desde un panorama conjuntista amplio, como puede ser ZF con la lógica clásica de primer orden, muchas de las corrientes anteriores se convierten en una suerte de "no observables". Una de las fallas básicas de la filosofía matemática ha consistido en *no acoplar* sus instrumentarios filosóficos de observación con los entornos observados, y en intentar producir panoramas uniformizados de conjunto. Otra metodología –más acorde con el desarrollo de las matemáticas contemporáneas– podría consistir en observar ciertos entornos de la matemática con los filtros filosóficos mejor *adecuados* para ello y, *luego*, intentar *pegar* sintéticamente las diversas observaciones filosóficas conseguidas (ver el *capítulo 3* para el programa pragmático –en el sentido de Peirce– que puede así bosquejarse, y los *capítulos 8-11* para la realización de ciertos pegamientos parciales).

Si es completamente *natural* utilizar herramientas de filosofía analítica para ver el universo conjuntista con la lógica clásica de primer orden subyacente, resulta equivocado pretender seguir con las mismas herramientas para observar *otros* entornos de la matemática (entornos alternos que son la *mayoría*: la teoría de conjuntos sólo ocupa un espacio muy reducido de la investigación matemática, como puede verse en la *MSC 2000*). Como veremos más adelante, son indispensables ciertas herramientas *dialécticas* para captar la esquematización y la fluxión, así como solo desde una perspectiva *relacional* sintética pueden entenderse las grandes corrientes de la estructuración contemporánea, o solo desde una perspectiva *modal* plena puede observarse la inexhaustible riqueza del continuo. La especificidad de las matemáticas modernas y contemporáneas *fuerza* a tener que estar cambiando de filtros en la observación filosófica, y se encuentra así en juego la elaboración de una nueva *óptica filosófica* que permita observar –con una maquinaria pragmática de lentes que aseguren menos distorsiones– el panorama de las matemáticas "reales".

Capítulo 2

Las matemáticas avanzadas dentro de los tratados de filosofía matemática. Un recorrido bibliográfico

En este capítulo, revisaremos la recepción que han tenido las matemáticas avanzadas dentro de la filosofía matemática. Como veremos, son claramente más las *ausencias* que las presencias, aunque ha habido importantes esfuerzos por abrirse hacia las matemáticas modernas y contemporáneas. Este capítulo solo pretende dejar sentados unos cuantos puntos de apoyo bibliográficos dentro de un panorama descriptivo *global*. En la tercera parte de este ensayo volveremos sobre varios de los autores aquí mencionados, centrándonos en problemáticas *locales* mucho más específicas y acotadas.

La primera sección –*El lugar de Lautman*– intenta resumir algunos de los aportes principales de la obra de Albert Lautman, como paradigma de una mirada filosófica atenta a las matemáticas modernas. La segunda sección –*Cerca de las matemáticas reales*– registra, en orden cronológico, después de Lautman, un modesto número de apariciones de las matemáticas avanzadas dentro de la filosofía, y una presencia aún más reducida allí de las matemáticas contemporáneas. La tercera sección –*Más filosofía, menos matemáticas*– explora el espectro de las matemáticas modernas y contemporáneas que aparece en algunos tratados de filosofía analítica de la matemática, y que se resume en el *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, donde se opta por ahondar en aspectos filosóficos, dejando de lado la matemática avanzada. Se trata, por supuesto, de una *opción* válida, pero esta debe entenderse como tal: una *elección* que lleva a descartar un inmenso panorama.

El corazón de las matemáticas tiene razones que la razón lingüística no conoce. Al igual que Stephen, en el *Retrato del artista adolescente* de Joyce, que debe enfrentarse al "corazón salvaje de la vida" y debe optar por evadirlo o por sumergirse en él, el filósofo de las matemáticas no puede evitar el tener que enfrentarse al "corazón salvaje" de las matemáticas. Podrá eludirlo, si así lo desea, pero sus consideraciones dejarán entonces de lado muchos aspectos centrales de la matemática; en particular, una comprensión de la *creatividad* matemática que deje de observar las matemáticas avanzadas no podrá ser sino una comprensión esquelética y limitada. ¿Qué diríamos de un historiador o de un filósofo del arte que pretendiera elaborar cuidadosas distinciones cromáticas restringiéndose únicamente a un conjunto de medias tintas, y dejara de lado, por ejemplo, el colorido complejo de Turner, Monet o Rothko? ¿Qué caso podríamos hacerle a un crítico literario que pretendiera circunscribir el "todo" de la invención literaria reduciéndolo al cuento o a la novela corta, y no considerara, por ejemplo, a Proust o a Musil?

En las artes, sería impensable –casi atroz– dejar de lado las grandes creaciones del género al querer elaborar una estética. Sin embargo, en la filosofía de las matemáticas, ha resultado fácil omitir las creaciones cimeras de las matemáticas avanzadas. Hemos señalado en la *introducción* y en el *capítulo 1* algunas de las razones para que ese "olvido" haya sido bastante cómodo y poco inquietante: la creencia de que contemplar el mundo de las matemáticas elementales *equivale* a contemplar el mundo de las matemáticas avanzadas, la uniformización de perspectivas a partir de filosofías del lenguaje, la asunción de que percibir los avances técnicos modernos y contemporáneos no conlleva mayores cambios en la filosofía matemática. A nuestro entender, se trata de tomas previas de posición, que impiden acercarse al mundo "real" de las matemáticas, como hoy en día sigue desarrollándose. Ya que, como lo hemos indicado en el *capítulo 1*, las matemáticas avanzadas cuentan con *especificidades* propias que las distinguen de las matemáticas elementales, el limitar la filosofía matemática a las matemáticas *elementales* –por más *sofisticadas* que sean, filosóficamente, esas consideraciones– presupone un cuestionable reduccionismo. Abordamos no obstante, en las primeras dos secciones de este capítulo, los trabajos de algunos filósofos de la matemática que sí intentaron acercarse al "corazón salvaje" de la disciplina.

2.1 El lugar de Lautman

Albert Lautman ha sido tal vez el filósofo del siglo XX que mejor se ha acercado a entender el mundo creativo de las matemáticas modernas. El *Ensayo sobre las nociones de estructura y de existencia en matemáticas*[21] es la tesis principal para el doctorado en Letras (Filosofía), defendida por Lautman en la Sorbona en 1937. El trabajo, dedicado a la memoria de su amigo y mentor Herbrand, constituye una verdadera revolución, tanto en las formas de hacer filosofía de la matemática, como en el fondo –a contracorriente– de las ideas planteadas y los alcances esperados. Lautman entronca una concepción estructural y una concepción dinámica de las

21 Albert Lautman, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. I. Les schémas de structure. II. Les schémas de genèse*, París: Hermann, 1938 (2 vols.). Reeditado en Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, París: 10/18, 1977, pp. 21-154.

matemáticas, donde se entrelazan la "vida" de las matemáticas modernas y un amplio espectro de acciones dialécticas: lo local y lo global (capítulo 1), lo intrínseco y lo inducido (capítulo 2), el devenir y lo acabado –estrechamente ligados al ascenso y al descenso del entendimiento– (capítulo 3), la esencia y la existencia (capítulo 4), los mixtos (capítulo 5), lo singular y lo regular (capítulo 6). La tesis se divide en dos grandes partes (*Esquemas de estructura* y *Esquemas de génesis*) para enfatizar en una de las constataciones fundamentales de Lautman sobre las matemáticas de su época: el carácter estructural de la matemática moderna (prefiguración del grupo Bourbaki: Lautman fue íntimo de Chevalley y de Ehresmann), y el consiguiente enlace de la creatividad matemática (génesis de objetos y conceptos) con las descomposiciones estructurales de múltiples dominios matemáticos.

Por primera vez en la historia de la filosofía matemática moderna, un filósofo realiza un *sostenido, profundo y amplio recorrido por la matemática de punta* de su época; al enfrentarse sin ambages a la técnica, y al "dividirla" en conceptos básicos que explica detenidamente al lector, Lautman presenta un riquísimo panorama de las grandes corrientes inventivas de la matemática moderna[22]. Rompiendo así las *formas* usuales de la exposición filosófica –que mantenía (y aún infortunadamente mantiene) al filósofo distanciado de la matemática *real*–, Lautman abre una extraordinaria brecha para intentar captar mejor las problemáticas de la creatividad matemática. Rompiendo también los cánones usuales aceptados en el *fondo* de los trabajos de la época (énfasis epistemológicos o lingüísticos), Lautman intenta reajustar un complejo tejido dialéctico-hermenéutico en el trasfondo de sus trabajos (ligado tanto a Platón como a Heidegger), muy distante de un platonismo "ingenuo" repetidas veces criticado por el mismo Lautman.

Simultáneamente, atento a lo más novedoso de las matemáticas de su momento y abierto a una relectura de las Ideas en su sentido platónico original –como "esquemas de estructura" que organizan lo efectivo–, Lautman muestra en su *Ensayo sobre las nociones de estructura y de existencia en matemáticas* las principales líneas de sostén de la arquitectónica moderna de las matemáticas. Las oposiciones dialécticas, las saturaciones parciales de esas oposiciones, y la construcción de mixturas,

22 He aquí un breve resumen de los temas matemáticos revisados por Lautman en su tesis principal. Capítulo 1: variable compleja, ecuaciones diferenciales parciales, geometría diferencial, topología, grupos cerrados, aproximaciones funcionales. Capítulo 2: geometría diferencial, geometría riemanniana, topología algebraica. Capítulo 3: teoría de Galois, cuerpos de clases, topología algebraica, superficies de Riemann. Capítulo 4: lógica matemática, aritmética de primer orden, campos de Herbrand, funciones algebraicas, cuerpos de clases, representaciones de grupos. Capítulo 5: campos de Herbrand, espacios de Hilbert, familias normales de funciones analíticas. Capítulo 6: operadores en espacios de Hilbert, ecuaciones diferenciales, funciones modulares. Adentrándose en el panorama dibujado por Lautman, el lector puede entonces realmente *sentir* los múltiples modos y movimientos creativos de la matemática moderna, nunca presentes en los ejemplos elementales usualmente aducidos en la filosofía de las matemáticas.

para ayudar a saturar algunas estructuras, se encadenan unas con otras y, sobre todo, con los procesos vivos de la técnica matemática subyacente. El entrelazamiento unitario de los métodos matemáticos, con membranas siempre permeables entre los diversos subcampos de la disciplina, es un acordonamiento dinámico, en permanente gestación. La matemática, lejos de ser solo una y eterna, está ligada indisolublemente a sus contrarios: es una-múltiple, así como estable-evolutiva. La riqueza de la matemática se debe en buena medida a esa elástica duplicidad que permite, técnica y teoremáticamente, su tránsito *natural* entre lo ideal y lo real.

En su tesis complementaria para el doctorado en Letras –*Ensayo sobre la unidad de las ciencias matemáticas en su desarrollo actual*[23]–, Lautman explora, con otros brillantes estudios de caso, la profunda unidad de las matemáticas modernas. Lautman cree detectar esa unidad en la creciente invasión de los métodos estructurales y finitistas del álgebra en todos los dominios de la matemática: descomposiciones dimensionales en la resolución de ecuaciones integrales (capítulo 1), métricas no euclidianas y grupos discontinuos en la teoría de funciones analíticas (capítulo 2), métodos del álgebra no conmutativa en las ecuaciones diferenciales (capítulo 3), grupos modulares en la teoría de funciones automorfas (capítulo 4). Lautman resalta así la estrecha unión de la dialéctica continuo/discreto dentro de la matemática moderna, una unión que, alternativamente, adquiere visos de "imitación" o de "expresión" entre estructuras finitas e infinitas: imitación cuando en lo infinito se intenta calcar alguna propiedad simple de las estructuras finitas para ayudar a resolver un problema, expresión cuando la emergencia de una nueva construcción infinita incluye en sí misma una representación de los dominios finitos que dieron lugar a esa emergencia. Las "analogías de estructuras y adaptaciones recíprocas" entre lo continuo y lo discontinuo son, para Lautman, uno de los motores básicos de la creatividad matemática, algo que toda la segunda mitad del siglo XX parece haber demostrado, tanto en el entreveramiento unitario de los métodos de la geometría algebraica que llevaron a la demostración del teorema de Fermat (Wiles), como en las adaptaciones geométricas y topológicas que se encuentran al borde de la prueba de la conjetura de Poincaré (Perelman).

Si, en la tesis complementaria, Lautman enfatiza sobre todo en la dirección (discreto $\rightarrow$ continuo), donde las herramientas del álgebra moderna ayudan a generar conceptos y construcciones del análisis, el estudio de la dirección dual (continuo $\rightarrow$ discreto) puede verse también en sus reflexiones sobre la teoría analítica de números, dentro de las *Nuevas investigaciones sobre la estructura dialéctica de las matemáticas*[24]. En este breve opúsculo –último trabajo de Lautman publicado en vida– se

---

23 Albert Lautman, *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*, París: Hermann, 1938. Reeditado en Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, op. cit. (nota 21), pp. 155-202.

24 Albert Lautman, *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques*, París: Hermann, 1939. Reeditado en Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, op. cit. (nota 21), pp. 203-229.

conjugan, en palabras del autor, "reflexiones sobre Platón y Heidegger con observaciones sobre la ley de reciprocidad cuadrática o la repartición de los números primos", intentando sustentar, una vez más, una de las tesis fundamentales de Lautman: mostrar "que ese acercamiento de la metafísica y de las matemáticas no es contingente sino necesario". En el tránsito heideggeriano entre una comprensión pre-ontológica y una existencia óntica, Lautman encuentra, dentro de los cauces internos de la filosofía, un eco importante de sus propias consideraciones sobre el tránsito de lo estructural a lo existencial, dentro de las matemáticas modernas.

En la segunda subsección de la primera parte de las *Nuevas investigaciones*, "La génesis de las Matemáticas a partir de la Dialéctica", Lautman define explícitamente algunos de los términos fundamentales que se encontraban en sordina en sus tesis: los pares de *nociones* dialécticas (todo/parte, extrínseco/intrínseco, sistema/modelo, etc.), y las *ideas* dialécticas asociadas, que deben comprenderse como resoluciones parciales de oposiciones entre "nociones". Por ejemplo, entender el continuo como saturación de lo discreto (compleción cantoriana de la recta real) es una "idea" lautmaniana que responde en parte al par de "nociones" continuo/discreto, pero es claro que puede haber igualmente otras múltiples "ideas" alternativas para acotar a las "nociones" en juego (como el continuo primigenio de Brouwer, del que se desprende lo discreto, inversamente al proceso de Cantor). Como consecuencia de la percepción sintética de Lautman, la matemática exhibe toda su viveza y resulta patente la riqueza no reduccionista de sus movimientos técnicos, conceptuales y filosóficos. Brilla así el acorde *armónico* de lo plural y lo uno, tal vez el mayor de los "milagros" de la matemática.

Los años de guerra reducen el ritmo de la obra de Lautman –fuertemente involucrado en actividades militares y de resistencia–, pero este encuentra aún tiempo para intentar elevar su trabajo por encima del horror que le circunda. En 1939, en una sesión memorable de la Sociedad Francesa de Filosofía, Lautman defiende, al lado de Jean Cavaillès, las tesis recientemente sustentadas por los dos amigos. La intervención de Lautman queda transcrita en "El pensamiento matemático"[25], donde Lautman insiste en el carácter estructural de la matemática moderna, y señala cómo, en los grupos, los cuerpos de números, las superficies de Riemann y múltiples otras construcciones, viven "nociones" opuestas (local/global, forma/materia, continente/contenido, etc.), y cómo "los contrarios no se oponen, sino que son susceptibles de componerse entre sí, para constituir esos mixtos que son las Matemáticas". Al final de su intervención, en un homenaje a Platón y volviendo al *Timeo*, Lautman propone una ambiciosa reedificación de la "teoría de las Ideas" para la filosofía matemática, en tres grandes etapas: 1. descripción de la riqueza inagotable de las matemáticas efectivas; 2.

25 Albert Lautman, "La pensée mathématique", *Bulletin de la Société Française de Philosophie* XL (1946), 3-17.

jerarquización de las génesis matemáticas; 3. explicación estructural de las razones de aplicabilidad de las matemáticas al universo sensible.

Los dos últimos trabajos de Lautman se enfrentan, en parte, a esta última tarea, y sirven así de cierre coherente a su labor filosófica. Capítulos de una monografía sobre filosofía de la física que Lautman no alcanzó a concluir[26], "Simetría y disimetría en matemáticas y en física" y "El problema del tiempo", abordan de manera aguerrida el problema de los enlaces entre lo ideal y lo real, a través de las complejas construcciones conceptuales de la mecánica cuántica, la mecánica estadística y la teoría general de la relatividad. Lautman establece algunas notables correlaciones "entre la simetría disimétrica en el universo sensible y la dualidad antisimétrica en el mundo matemático", descubre el potencial de la reciente teoría de retículos (Birkhoff, von Neumann, Glivenko) y muestra meticulosamente que toda concepción del tiempo debe tener en cuenta, a la vez, las evoluciones locales y la forma global de todo el universo. Buscando una explicación de la dualidad sensible del tiempo (como dimensión orientada y como factor de evolución), Lautman encuentra las raíces "ideales" de esa dualidad en un hondo y original estudio estructural del doble comportamiento del tiempo en las ecuaciones diferenciales. Elevando la matemática y la física, hasta visualizarlas, en su conjunto, como "nociones" de orden superior ligadas a la simetría (predominantemente matemática) y a la disimetría (predominantemente física), Lautman consigue completar así una primera circunnavegación de su teoría de las "ideas".

Entre los muchos aportes de Lautman, son de particular relevancia sus estudios sobre los *mixtos* en las matemáticas modernas, así como su explicitación de las *ideas/nociones* que ayudan a encarnar obstrucciones y resoluciones dentro de la creatividad matemática. Las mixturas matemáticas son legión; entre las más estudiadas por Lautman se encuentran la topología algebraica, la geometría diferencial, la geometría algebraica, la teoría analítica de números. Los enlaces del término (subdisciplina central) y del adjetivo (subdisciplina "invasora") solo señalan muy tenuemente las ósmosis reales del proceder matemático moderno; las antiguas delimitaciones rígidas desaparecen y surgen pliegues flexibles dentro de una nueva clasificación que, más que un árbol, parece una extensa superficie líquida donde fluye la información entre núcleos móviles del saber. Albert Lautman es el *único* filósofo de la matemática moderna que ha enfatizado y estudiado adecuadamente, por un lado, en el acontecer de los mixtos matemáticos *en acto*, y por otro lado, en las "ideas" y "nociones" que permiten entender el tránsito de esos mixtos *en potencia*. Dada la importancia ineludible de las construcciones mixtas en la matemática contemporánea, no es de extrañar entonces el inmenso valor que merecería adquirir en nuestros días la filosofía de las matemáticas de Lautman, en el caso de que este pudiese

26 Albert Lautman, *Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique*, París: Hermann, 1946. Reeditado en Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, op. cit. (nota 21), pp. 231-280.

ser más conocido. La ruptura de una pretendida matemática “tautológica”, dudoso invento “puro” de la filosofía analítica, y la apertura hacia una matemática *contaminada*, mucho más real, están a la orden del día.

Lautman exalta la riqueza conseguida al introducir métodos analíticos “trascendentes” en la teoría de números, y explica *por qué* las mixturas y las mediaciones tienden a requerirse naturalmente en la creatividad matemática:

> la demostración de ciertos resultados relativos a los números enteros se apoya sobre las propiedades de ciertas funciones analíticas *porque* la estructura de los medios analíticos empleados se encuentra ya en acuerdo con la estructura de los resultados aritméticos buscados.

De hecho, el gran interés de los mixtos reside en su capacidad de reflejar parcialmente propiedades entre extremos, y de servir como *relevos* en la transmisión de información[27]. Ya sea en una estructura dada (espacio de Hilbert), en una colección de estructuras (campos ascendentes de Herbrand) o en una familia de funciones (familias normales de Montel), los mixtos, por un lado, imitan la estructura de los dominios subyacentes, y por otro lado, sirven de bloques parciales para la estructuración de los dominios superiores. Sin este tipo de *buscada* contaminación, de premeditada aleación, sería impensable la matemática contemporánea. Una notable consecución como la prueba del teorema de Fermat (1994) solo es posible como esfuerzo final en un complejo ir y venir donde intervienen toda clase de mixtos matemáticos: un problema sobre curvas elípticas y formas modulares resuelto gracias a extenuantes enlaces en geometría algebraica y variable compleja, alrededor de las funciones zeta y sus representaciones de Galois.

Los “mixtos” aparecen en el primer escrito conservado de Lautman –su trabajo sobre lógica matemática, publicado póstumo[28]–. A los 26 años, Lautman describe la construcción de los “campos” de Herbrand y muestra que “los hilbertianos han sabido interponer una esquemática intermedia, de individuos y de campos que se consideran no tanto en sí mismos, sino

---

27 El “relé” de Francastel (del francés *relais*: relevo) proporciona –para la obra de arte– otro entronque mixto de gran valor, donde se conjugan lo percibido, lo real y lo imaginario. “El signo plástico, por ser el lugar donde se encuentran e interfieren elementos procedentes de estas tres categorías, no es ni solamente expresivo (imaginario e individual) ni representativo (real e imaginario), sino también figurativo (unido a las leyes de la actividad óptica del cerebro y a las de la técnica de elaboración del signo en cuanto tal)” (Pierre Francastel, *La realidad figurativa* (1965), Barcelona: Paidós, 1988, p. 115). Si contraponemos una definición de la obra artística como “forma que se significa” (Focillon) con una definición de la obra matemática como “estructura que se forma” (nuestra extrapolación, motivados en Lautman), puede intuirse –una vez más– el hondo fondo común subyacente en la estética y las matemáticas. Para una notable recuperación de una historia del arte que registra lo complejo y lo diferencial, pero que lo recompone en un diálogo estratificado y jerárquico atento a lo universal y a la “verdad” (tarea eminentemente lautmaniana), véase Jacques Thuillier, *Théorie générale de l’histoire de l’art*, Paris: Odile Jacob, 2003 (definición de Focillon en p. 65 y extensa discusión subsiguiente).

28 Albert Lautman, “Considérations sur la logique mathématique”, en Albert Lautman, *Essai sur l’unité des mathématiques et divers écrits*, op. cit. (nota 21), pp. 305-315.

por las consecuencias infinitas que permiten los cálculos finitos operados gracias a ellos". Comparando esa "esquemática intermedia" con la jerarquía de tipos y órdenes de Russell, Lautman indica que, "en uno y otro caso, nos encontramos ante una estructura cuyos elementos no son ni enteramente arbitrarios, ni construidos realmente, sino que componen como una *forma mixta* que extrae su fecundidad de su doble naturaleza". Intuir claramente las formas mixtas de la lógica en los años treinta, cuando la lógica tendía a verse al contrario como una "forma pura", muestra la independencia y el acumen del joven filósofo. De hecho, resulta ahora evidente que esas formas mixtas de la lógica son la causa profunda de la eclosión de la lógica matemática en la segunda mitad del siglo, felizmente invadida por métodos algebraicos, topológicos y geométricos. En ese sentido, Lautman nunca presupone una lógica *a priori*, previa a la matemática, sino que la considera parte integrante del hacer matemático, intuyendo así la actual concepción plural de la lógica, donde un sistema lógico, en vez de anteponerse a una colección de estructuras matemáticas, se *adecúa* a ella.

En un texto sobre el "método de división" dentro de la axiomática moderna –es decir, en su primer artículo publicado[29]– Lautman pasa ya a ligar la mención de los mixtos con la gran tradición filosófica:

> no es la lógica aristotélica, aquella de los géneros y especies, la que aquí interviene [*i.e.*, en la creación matemática], sino el método platónico de división, tal cual lo enseñan el *Sofista* y el *Filebo*, para el cual la unidad del Ser es una unidad de composición y un punto de partida hacia la búsqueda de los principios que se unen en las ideas.

Lautman resalta el interés dinámico de un mixto, "que tiende a liberar las nociones simples en las cuales ese mixto participa", y sitúa así a la creatividad matemática en una dialéctica de *liberación* y *composición*. En términos ajenos a Lautman, pero que sitúan su posición en un terreno más conocido, el hacer matemático, por un lado, divide el contenido de un concepto mediante definiciones (sintaxis) y derivaciones (gramática), y libera sus componentes simples; por otro lado, mediante modelos (semántica) y traslados (pragmática), construye entes intermedios que relanzan la existencia de esos filamentos simples, recomponiéndolos dentro de nuevos conceptos. Cuando el mixto consigue combinar a la vez una gran sencillez y un fuerte poder reflector en sus componentes –como es el caso de las superficies de Riemann o de los espacios de Hilbert, tan admirados y ejemplarmente estudiados por Lautman–, la creación matemática alcanza tal vez su mayor altura.

En las tesis de Lautman, todo el movimiento de reflexión del filósofo está impulsado por una contrastación pendular entre conceptos complementarios (local/global, todo/parte, extrínseco/intrínseco, continuo/

29 Albert Lautman, "L'axiomatique et la méthode de division", *Recherches philosophiques* VI (1936-37), 191-203. Reeditado en Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, op. cit. (nota 21), pp. 291-304.

discreto, etc.), pero es en sus *Nuevas investigaciones sobre la estructura dialéctica de las matemáticas* donde Lautman introduce los términos que gobiernan esos enlaces dialécticos. Lautman define una *noción* como uno de los polos de una tensión conceptual y una *idea* como una resolución parcial de esa polaridad. Los conceptos de finitud, infinitud, localización, globalización, cálculo, modelización, continuidad o discontinuidad, son "nociones" lautmanianas (ejemplos de Lautman), y las propuestas de que lo infinito se obtiene como lo no finito (esqueleto cardinal), lo global como pegamiento de lo local (compacidad), lo modélico como realización de lo calculatorio (semántica conjuntista), o lo continuo como compleción de lo discreto (recta cantoriana), son algunas "ideas" lautmanianas (ejemplos nuestros).

El interés de las "nociones" e "ideas" es triple: permite *filtrar* (liberar) ornamentos innecesarios y decantar el fondo de algunas armazones matemáticas, permite *unificar* desde un nivel problemático "superior" otras construcciones aparentemente dispersas, y permite *abrir* el espectro de las matemáticas a opciones diversas. Ya sea filtrando o unificando el panorama matemático (teoremas de dualidad en topología algebraica y en la teoría de retículos), ya sea abriéndolo hacia un ámbito de posibilidades más pleno –"ideas no estándar" que resuelven de *otra manera* las oposiciones entre "nociones" fundamentales: lo infinito como lo no acotable (Robinson), lo discreto como demarcación de un continuo primigenio (Brouwer), lo calculatorio como sistema de coordenadas para lo modélico (Lindström)–, las "nociones" e "ideas" lautmanianas permiten recorrer *transversalmente* el universo de las matemáticas y explicitar tanto la *amplitud* de ese universo, como su acorde armónico entre lo uno y lo múltiple.

Para Lautman, las "nociones" y las "ideas" se sitúan en un nivel "superior", donde el intelecto puede imaginar la *posibilidad de una problemática*, que, sin embargo, solo adquiere su sentido al encarnar inmediatamente en las matemáticas reales. Lautman es consciente de que parece introducirse entonces un *a priori* en la filosofía de las matemáticas, pero lo explica como una mera "urgencia de los problemas, anterior al descubrimiento de sus soluciones". De hecho, la misma "anterioridad" del problema debe considerarse solo desde un punto de vista puramente *conceptual* puesto que, como el mismo Lautman lo señala, los elementos de una solución pueden encontrarse dados antes *en la práctica* y solo incitar *luego* al planteamiento de un problema que incorpore esos datos (lo que no quita que, en un reordenamiento conceptual, el problema deba finalmente preceder a la solución). Paralelamente con su estrategia de aprehender la estructura global de una teoría antes de predefinir su estatus lógico, Lautman sitúa consistentemente la lógica matemática como un hacer dentro de la matemática, que no debe precederla arbitrariamente y que debe situarse al *mismo nivel* de las demás teorías matemáticas, anticipando así la concepción actual de la lógica tal como se asume desde la teoría de modelos. Según Lautman, "la lógica requiere una matemática para existir", y en el vaivén de los esquemas lógicos *mezclados* con sus realizaciones efectivas es donde yace la fuerza del hacer matemático.

En la tirantez de una problemática "universal" (o "genérica") y de sus resoluciones parciales "concretas" (o "efectivas") radicaría, según Lautman, buena parte del vaivén estructural y unitario de las matemáticas. Como veremos en el *capítulo 7*, este es precisamente el paradigma propuesto por la teoría matemática de categorías[30]. Cuando Lautman observa los teoremas de dualidad de Poincaré y de Alexander y describe cómo "el estudio estructural de un espacio que recibe a un complejo se ve remitido al estudio estructural de ese complejo", cuando analiza el ascenso hacia una superficie universal de recubrimiento y contempla la jerarquía de isomorfismos "entre los grupos fundamentales de las diferentes superficies de recubrimiento de una superficie dada F y los subgrupos del grupo fundamental de F", cuando menciona una inversión entre el teorema de completitud de Gödel y el teorema de Herbrand, que extiende luego a una alternancia entre forma y materia gracias a ciertas estructuras mediadoras, o cuando –más atrevidamente aún– se pregunta si "es posible describir, en el seno de las matemáticas, una estructura que sea como un primer dibujo de la forma temporal de los fenómenos sensibles", Lautman está adelantándose en todos los casos a ciertas técnicas del pensamiento categórico: funtores en topología algebraica, funtores representables en variedades, adjunciones en lógica, o alegorías libres. En efecto, al "admitir la legitimidad de una teoría de estructuras abstractas, independientes de los objetos ligados entre sí por esas estructuras", Lautman intuye una matemática de relaciones estructurales *más allá de los objetos*, es decir, prefigura el camino de la teoría de categorías.

30 Lautman no llegó a conocer la teoría de categorías, que empezaba a surgir en el momento mismo de su muerte (Samuel Eilenberg, Saunders MacLane, "Natural isomorphisms in group theory", Proc. Nat. Acad. Sci. 28 (1942): 537-543; Samuel Eilenberg, Saunders MacLane, "General theory of natural equivalences", Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945): 231-294). Es difícil saber en qué medida las conversaciones con su amigo Ehresmann –introductor de la teoría general de los espacios fibrados en los años cuarenta y propulsor de la teoría de categorías en Francia desde fines de los años cincuenta– pueden haber influido en el *fondo implícito* de una concepción tan claramente categórica de las matemáticas (en retrospectiva) como es la de Lautman. Sin embargo, en la *Sesión de la Sociedad Francesa de Filosofía* en la que Cavaillès y Lautman defendieron sus trabajos, y en la que Ehresmann participó, este último ya señalaba precisamente cómo muchas de las concepciones filosóficas de Lautman debían filtrarse técnicamente y convertirse en un bagaje *dentro de las matemáticas mismas*: "Si he entendido bien, en ese dominio de una dialéctica supra-matemática, no sería posible precisar y estudiar la naturaleza de esas relaciones entre las ideas generales. El filósofo podría sólo poner en evidencia la urgencia del problema. Me parece que si nos preocupamos por hablar de esas ideas generales, concebimos ya de una manera vaga la existencia de ciertas relaciones entre esas ideas; desde ese momento, no podemos entonces detenernos a mitad de camino; debemos plantearnos el problema, verdaderamente matemático, que consiste en formular explícitamente esas relaciones generales entre las ideas consideradas. Creo que a ese problema se le puede dar una solución satisfactoria en lo que respecta a las relaciones entre el todo y sus partes, lo global y lo local, lo intrínseco y lo extrínseco, etc. [...] Creo que los problemas generales planteados por Lautman pueden enunciarse en términos matemáticos, y añadiría que no se puede evitar enunciarlos en términos matemáticos". Efectivamente, todo el auge de la teoría de categorías otorga la razón a Ehresmann.

El lenguaje lautmaniano de “nociones”, “ideas” y jerarquías dialécticas adquiere en la teoría de categorías un delimitado soporte técnico. Las “nociones” pueden ser precisadas mediante construcciones categóricas universales (diagramas, límites, objetos libres), las “ideas” mediante elevaciones de clases de objetos libres a adjunciones funtoriales, las jerarquías dialécticas mediante escalas de niveles de transformaciones naturales. Así, por ejemplo, el Lema de Yoneda explica técnicamente la *inevitable* presencia de lo ideal en cualquier consideración plena de la realidad matemática –una de las posiciones básicas de Lautman–, al mostrar que *toda* categoría pequeña puede ser sumergida en una categoría de funtores, donde, además de los funtores representables que forman una “copia” de la categoría pequeña, aparecen también, forzosamente, otros funtores ideales (“prehaces”) que *completan* el universo. Se trata de una aparición ubicua de lo “ideal” al tratar de captar lo “real”, una ósmosis permanente y penetrante en toda forma de creatividad matemática.

La mayor parte de los esquemas de estructura y los esquemas de génesis estudiados por Lautman en su tesis principal pueden precisarse categóricamente y, sobre todo, extenderse. Por ejemplo, la “dualidad del estudio local y el estudio global” entronca con un complejo instrumentario de localizaciones funtoriales y reintegraciones globales (teoremas de representación, al estilo Freyd), la “dualidad del punto de vista extrínseco y del punto de vista intrínseco” desemboca en el poder de la lógica interna de un topos (lógica geométrica, al estilo Lawvere), y el “interés del esquema lógico de la teoría de Galois” se extiende a una teoría general de la residualidad (conexiones categóricas de Galois, al estilo Janelidze). Entonces, cuando vemos cómo Lautman observa que “ciertas afinidades de estructura lógica permiten acercar teorías matemáticas diferentes, por el hecho de que cada una aporta un esbozo de solución diferente para un mismo problema dialéctico”, que “puede hablarse de la participación de distintas teorías matemáticas en una Dialéctica común que las domina”, o que la “indeterminación de la Dialéctica [...] asegura al mismo tiempo su exterioridad”, resulta natural situar sus ideas categóricamente, ya sea en el vaivén entre categorías abstractas (“Dialéctica común”) y categorías concretas (“distintas teorías matemáticas”), ya sea cerca de los objetos libres (“indeterminación de la Dialéctica”) cuya extensa aplicabilidad exterior en todo el espectro de las matemáticas es consecuencia precisamente de su esquematismo.

El enriquecimiento mutuo entre las Matemáticas efectivas y la Dialéctica (mayúsculas de Lautman) se refleja en un ascenso y descenso natural entre las *nociones e ideas* lautmanianas, por un lado, y los *mixtos*, por otro lado. De hecho, ascendiendo desde los mixtos, se *liberan* “nociones” e “ideas” que permiten situar el lugar de esos mixtos dentro de una dialéctica más amplia; y, a su vez, descendiendo desde las “nociones”, se elaboran nuevos mixtos para precisar y *encarnar* el contenido de las “ideas” en juego. Uno de los méritos mayores de la obra de Lautman consiste en haber mostrado cómo esos procesos de ascenso y descenso deben estar *indisolublemente* ligados en la filosofía de las matemáticas *in extenso*, así como lo están en una correspondencia de Galois *in nuce*.

2.2 Cerca de las matemáticas reales

En las páginas siguientes realizaremos un breve recorrido por las obras de otros autores que han intentado acercarse al "corazón" de las matemáticas "reales". El recorrido es cronológico, y puede considerarse adecuadamente representativo, aunque ciertamente no exhaustivo. Para cada obra se señalarán sucintamente, primero, qué espectro matemático se revisa, y segundo, qué consideraciones globales se obtienen luego de haber ejecutado esa revisión. Como veremos, los acercamientos se dan sobre todo alrededor de las matemáticas clásicas (Pólya, Lakatos, Kline, Wilder, Kitcher), aunque otros esfuerzos intentan observar las modernas (de Lorenzo, MacLane, Tymoczko, Châtelet, Rota) o aun las contemporáneas (Badiou, Maddy, Patras, Corfield). En ninguno de los casos de que tenemos noticia, se da una comprensión tan precisa y amplia de las matemáticas modernas como aquella alcanzada por Lautman.

George Pólya

Los trabajos de Pólya constituyen una mina de ejemplos para acercar al lector a los procesos de descubrimiento *e* invención (los *dos* procesos son imprescindibles) dentro de las matemáticas clásicas y las matemáticas elementales. *Mathematics and Plausible Reasoning* (Princeton: Princeton University Press, 1954) presenta una importante colección de estudios de caso alrededor de dos grandes temas: las construcciones analógicas e inductivas en matemáticas, y los modos de inferencia probable. El volumen I (*Induction and Analogy in Mathematics)* explora el análisis clásico –sobre todo alrededor de la figura de Euler, magníficamente redivivo–, la geometría de los sólidos, la teoría elemental de números, el estudio de máximos y mínimos, y algunos problemas elementales de la física. Pólya estudia con cuidado los vaivenes entre generalización y especialización, algunas clases de jerarquías analógicas, la construcción de los múltiples pasos de una demostración y la conformación de conjeturas. Debe resaltarse la inclusión de numerosos y meditados ejercicios (con soluciones) para abrir la mente del lector (filósofo o matemático) hacia una comprensión no dogmática de la práctica matemática. El volumen II (*Patterns of Plausible Inference*) se enfrenta a la problemática de la plausibilidad de ciertas hipótesis de las cuales se deduce otra sentencia (una suerte de *modus ponens* invertido que corresponde a la "retroducción" de Peirce, no mencionada por Pólya); el problema de la inferencia plausible [$A \rightarrow B$, B ⏩ A] consiste en precisar condiciones sobre la deducción $A \rightarrow B$ y sobre la eventual verdad de B para que la retroducción ⏩ hacia A sea lo más plausible posible. Pólya se enfrenta entonces a los grados de progresión de una prueba, a las pequeñas variaciones internas que permiten superar las obstrucciones encontradas en un proceso de solución, al azar inventivo, al ir y venir de hipótesis y lemas intermedios que van configurando una demostración. Con una acerada visión de las matemáticas clásicas se detecta ya la compleja jerarquización que explotará luego en las matemáticas modernas, aunque otras de las características modernas (riqueza semántica, mixturas teoremáticas, unidad estructural) no alcancen a darse aún en el ámbito clásico.

En *Mathematical Discovery* (New York: Wiley, 1962), Pólya se restringe hacia ejemplos de las matemáticas elementales (formas geométricas básicas, sumas numéricas, triángulo de Pascal) –aunque incluya también algunas referencias clásicas alrededor de límites y series de potencias– para mostrar cómo van surgiendo y concretándose las ideas matemáticas, desde lo vago y aparentemente contradictorio, hasta el control medido de una prueba. Mediante procesos de figuración, superposición y ampliación, Pólya muestra cómo se van formando redes de nociones y problemas auxiliares que convergen hacia la solución de un problema inicial, y cómo un sorprendente enlace de azar y disciplina se encuentra a menudo escondido detrás de diversas demostraciones. Numerosos ejemplos, y ejercicios con soluciones, acercan de nuevo al lector a la práctica matemática. Aunque quede algo en sordina, la riqueza dinámica de la matemática moderna se llega a intuir en esa aproximación práctica.

Imre Lakatos

Lakatos introduce sistemáticamente, en filosofía de las matemáticas, el método de conjeturas y refutaciones aplicado previamente por Popper al conjunto de la filosofía de la ciencia. En *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery* (Cambridge: Cambridge University Press, 1976; extendiendo artículos previos de 1963-64), Lakatos explora los mecanismos fluctuantes del descubrimiento matemático, las normas cambiantes de las pruebas, los enlaces de contraejemplos y lemas en la construcción de una demostración, el ir y venir de una matemática entendida como ciencia experimental. Los ejemplos aducidos son eminentemente clásicos y tratados con detenimiento: teorema de Euler sobre poliedros, Cauchy y los problemas de convergencia uniforme, variación acotada en la integral de Riemann. Múltiples formas dialécticas –usos explícitos de la tríada tesis-antítesis-síntesis, juegos expositivos con el diálogo platónico, incesante ir y venir entre obstrucciones y resoluciones– recorren el trabajo, y detectan así el surgimiento de la dinámica dialéctica que gobernará el desarrollo de las matemáticas modernas.

En *Mathematics, Science and Epistemology (Philosophical Papers, vol. II)* (Cambridge: Cambridge University Press, 1978) se reúnen póstumamente sus artículos sobre filosofía de las matemáticas. El espectro observado es de nuevo el entorno de las matemáticas clásicas (desde los griegos hasta Abel y Cauchy, quien se constituye en el centro de las consideraciones de Lakatos), al cual hay que añadir diversos comentarios sobre fundamentos modernos (Russell, Tarski, Gödel), siguiendo la línea preponderante adoptada por la filosofía de la matemática en el siglo XX. La matemática contemporánea solo emerge alrededor del análisis no estándar según Robinson, que resulta de interés para Lakatos al poder ligarlo a la recuperación de los infinitesimales utilizados por Cauchy. Se proponen diversas jerarquías alrededor de las etapas de una prueba (pre-formal, formal, pos-formal), y se afinan ejemplos alrededor del método de conjeturas, pruebas y refutaciones. No se mencionan las profundas herramientas de geometría algebraica que ya se habían construido en los años sesenta (Grothendieck) y que llevarían finalmente a la prueba de grandes teoremas aritméticos como las conjeturas de Weil (Deligne, 1973), pero se realizan, en cambio, dudosas especulaciones sobre la indecidibilidad del teorema de Fermat: un ejemplo más en el que la *distancia* entre el filósofo de la matemática y las matemáticas de *su* época le impiden observar cualquier tipo de *instantáneas* sobre el pensamiento matemático que se fragua a su lado.

Javier de Lorenzo

En su primera monografía, *Introducción al estilo matemático* (Madrid: Tecnos, 1971), De Lorenzo se muestra inmediatamente alerta a los modos de "hacer" de las matemáticas avanzadas. El autor se enfrenta con el ímpetu creativo de grandes figuras de la matemática moderna (Cauchy, Abel, Galois, Jacobi, Poincaré, Hilbert, el grupo Bourbaki, etc.) y constata que ciertos *fragmentos* de la matemática avanzada –teoría de grupos, análisis real, geometrías abstractas son algunos de sus ejemplos preferidos– conllevan *distintos* modos de visión, intuición, manejo operatorio y, aun, deducción, dentro de cada uno de sus contextos conceptuales, prácticos y formales. De Lorenzo señala que la matemática "crece por yuxtaposición, dialéctica y no orgánicamente", y rompe así una visión tradicional de la matemática –que crecería por acumulación y que progresaría ascendentemente–, proponiendo en su lugar un ensanchamiento conceptual de la disciplina, donde se entrelazan *horizontalmente* nuevos ámbitos, sin que deban situarse unos por encima de otros.

En *La matemática y el problema de su historia* (Madrid: Tecnos, 1977), De Lorenzo postula una radical historicidad del hacer matemático. Las referencias a las matemáticas avanzadas se clasifican alrededor de tres grandes entornos, donde se fraguan, en su interpretación, las rupturas y las inversiones mayores que dan lugar a la matemática moderna: *entornos de 1827*, donde se invierte el programa de resolución de los problemas matemáticos, partiendo "de lo que parece inalcanzable para dar razón del por qué (los problemas) pueden o no resolverse", y donde la matemática comienza a nutrirse de ella misma y de sus limitantes; *entornos de 1875*, donde los haceres de la matemática del medio siglo anterior se unifican (grupos, conjuntos) o se transvasan (modos geométricos convertidos en modos algebraicos o axiomáticos), generando importantes construcciones (grupos de Lie, topología conjuntista, geometría algebraica, etc.) que impulsan el desarrollo de las matemáticas de comienzos del siglo XX;

entornos de 1939, donde el grupo Bourbaki fija la orientación de las matemáticas contemporáneas alrededor de las nociones de estructura y morfismo, invierte el enfoque de estudio de los objetos matemáticos, y pasa a buscar primordialmente las relaciones entre estructuras abstractas (álgebras, topologías, órdenes, etc.). En esta y en otras obras (ver nota 13), De Lorenzo exhibe también una fina atención por la matemática contemporánea (con menciones detalladas, por ejemplo, a Weil, Schwartz o Lawvere[31]), aunque su foco primordial se mantiene en la matemática moderna. De Lorenzo constata, en resumen, que el conocimiento matemático se produce a lo largo de muy distintos *contextos* y ramales, siguiendo múltiples tiempos y ritmos; incesantes incorporaciones, *transvases*, osmosis, traducciones y representaciones se producen luego entre los diversos entornos del saber matemático; las nociones ya construidas dan lugar entonces a nuevas construcciones mediante diversas deformaciones y *transfiguraciones*.

Raymond L. Wilder

Mathematics as a Cultural System (Oxford: Pergamon Press, 1981) propone una valiosa y original concepción de las matemáticas como un "sistema vectorial", donde diversas tendencias de las matemáticas se contraponen, superponen, enlazan y consolidan, como si se situaran dentro de una red de operaciones vectoriales. En vez de entender el ámbito de las matemáticas siguiendo el modelo dispersivo de un "árbol", el sistema vectorial permite introducir con mayor fineza las ideas fundamentales de direccionalidad, potencialidad, normalización y singularidad asociadas a campos de fuerza de vectores. Wilder explora múltiples ejemplos en las matemáticas clásicas (Leibniz, Fermat, Gauss y, particularmente, Desargues), así como en las matemáticas modernas (Bolzano, Lobachevski, Riemann, Hilbert), donde se establece una viva dialéctica entre campos potenciales (e.g. resolución de ecuaciones algebraicas), vectores normales (e.g. manipulaciones *ad hoc* por radicales) y singularidades (e.g. emergencia "genial" de Galois). Un gran conocimiento de la topología y el álgebra modernas –Wilder es uno de los pocos matemáticos *activos* (junto con Pólya y MacLane) que aparecen en el recorrido bibliográfico de este capítulo– permite ir mostrando en detalle que la "realidad" matemática es una suerte de flujo cambiante dentro del campo conceptual de vectores asociado, y que diversas tendencias se van

---

31 Acerca de Lawvere, por ejemplo, De Lorenzo señala –sólo *siete* años después (!) de que Lawvere introdujera los topos elementales (1970)– que "el enlace de la teoría de categorías con la de topos, prehaces y geometría algebraica se está mostrando esencial para los intentos de Lawvere y de quienes trabajan en la misma dirección, de lograr una fundamentación, que él califica de «dialéctica», del trabajo matemático, aun reconociendo que la misma no puede tener otra característica que la meramente descriptiva, logrando así, por ejemplo, una revisión de la lógica intuicionista de Heyting como la más adaptada a la teoría de topos". La investigación matemática *en curso* ("se *está mostrando*", "*trabajan*") no solo emerge en las insólitas consideraciones de un historiador y filósofo, sino que lo hace del modo *más acertado* posible, al conseguir detectar el *núcleo conceptual* de la situación: los enlaces de los topos con la geometría algebraica y con la lógica intuicionista subyacente.

modificando de acuerdo con su posicionamiento histórico dentro de la red. Una evolución de la intuición matemática *colectiva* y una búsqueda de *invariantes* en esa evolución permiten mostrar cómo se modifica naturalmente el conocimiento matemático y cómo se estabiliza y permanece, a pesar de su misma plasticidad.

Morris Kline

En *Mathematics: The Loss of Certainty* (New York: Oxford University Press, 1980), se eleva la mirada de un gran conocedor de la historia de las matemáticas, que va acompañada no obstante de especulaciones filosóficas mucho más débiles. Kline se muestra particularmente atento a cuatro registros principales: 1. la matemática griega; 2. el análisis clásico (surgimiento, desarrollo, desorden, fundamentos, crisis, limitaciones); 3. la matemática moderna (revisión de diversas consideraciones de Poincaré, Weyl, Borel, Hilbert, von Neumann, Stone, Dieudonné, etc.); 4. los fundamentos (Cantor, Brouwer, Gödel, etc.). Curiosamente, a pesar del profundo conocimiento histórico desplegado, las reflexiones que en él se originan son más que debatibles: insistencia en un desarrollo "ilógico" de la matemática (donde errores, deslices conceptuales y recursos a la intuición representarían un papel determinante), percepción de un "estado insatisfactorio de las matemáticas", proclamación de un "fin de la Edad de la Razón", sensación de una multiplicidad estallada de las matemáticas sin posibilidades de unificación, indicación de un creciente aislamiento que lleva a "desastres" en la disciplina. Sorprende una visión tan negativa de la matemática, realizada en los años de 1980, cuando esta se encuentra en plena eclosión; una vez más, una toma *previa* de posición filosófica –sensibilidad de Kline por la supuesta "pérdida de las certidumbres" posmoderna– nubla la visión, y no deja percibir la dinámica vida técnica que se da alrededor del observador. Si algunos puntos críticos son valiosos (lugar del error, multiplicidad, relatividad), al llevarlos al extremo y al separarlos de sus contrapartes polares naturales (prueba, unidad, universalidad) se incurre en una excesiva oscilación del péndulo, que impide detectar una urdimbre relacional mucho más compleja.

Philip Kitcher

The Nature of Mathematical Knowledge (New York: Oxford University Press, 1983) sigue concentrándose en episodios de la matemática clásica, en la línea de Pólya y Lakatos. Los ejemplos estudiados incluyen a Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Cauchy; un extenso estudio de caso (cap. 10) revisa el desarrollo del análisis (1650-1870); la matemática moderna aparece de manera mucho más puntual, y son sintomáticas en ese sentido las referencias "elementales" a Galois (reducidas al problema de la irresolubilidad de ecuaciones) o a Riemann (alrededor de la construcción de su integral). Enfocadas de lleno en el espectro clásico, varias de las reflexiones de

Kitcher prefiguran con mucho acierto la compleja red de construcciones y operaciones ideales que se dará en las matemáticas modernas, así como su incesante evolución y acople entre fragmentos conceptuales y datos reales. Particularmente sensible al *cambio* matemático, Kitcher consigue evocar la dinámica de la matemática y el tránsito imprescindible de la disciplina entre lo ideal y lo real, entre lo posible, lo actual y lo necesario.

Thomas Tymoczko

La labor de Tymoczko como editor de *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (Boston: Birkhäuser, 1986) ayuda a explicitar con claridad las dos grandes vertientes a las cuales la filosofía de la matemática podría empezar a abocarse después de muchas décadas de preponderancia de la filosofía analítica. La primera parte parte del libro ("Challenging Foundations") recuerda que, más allá de los fundamentos, la filosofía tiene muchos otros temas para estudiar dentro de las matemáticas[32]. La segunda parte ("Mathematical Practice") señala que el filósofo debe también inclinarse a observar la práctica matemática, la evolución de estándares como "verdad" o "prueba", la oscilación entre pruebas informales y rigurosas, la complejidad de la arquitectónica matemática. En esa segunda parte aparecen los artículos más cercanos a las matemáticas modernas y contemporáneas (Tymoczko, sobre el problema de los cuatro colores; Chaitin, sobre complejidad computacional), pero el conjunto de los textos sigue evocando, en su mayoría, ejemplos clásicos (como Grabiner, alrededor del desarrollo del análisis en los siglos XVIII y XIX)[33]. Una suerte de "cuasi-empirismo" adoptado por Tymoczko señala que un conocimiento más profundo de la práctica matemática podría ayudar a resolver ciertas controversias filósoficas alrededor del realismo y el idealismo; por tanto –y es uno de los enfoques centrales de nuestro trabajo– no solo más filosofía, sino *más matemáticas*, pueden ser de gran ayuda para resolver ciertos atolladeros de la filosofía matemática.

32 Paul Bernays, uno de los grandes adalides de los fundamentos de la matemática, indicaba ya *en 1940*, en una reseña poco conocida de las obras de Lautman, que "debe decirse, en favor del método de Lautman, que es más apropiado que las discusiones sobre fundamentos para darle al filósofo una mejor impresión del contenido y de la naturaleza de las matemáticas modernas. En efecto, vale la pena enfatizar que los problemas de fundamentos de ningún modo constituyen el único aspecto filosóficamente importante de las matemáticas" (Paul Bernays, "Reviews of Albert Lautman", *Journal of Symbolic Logic* 5 (1940): 20-22; cita p. 22). Admirable conciencia de un verdadero *constructor* de los fundamentos de la matemática, de la que han carecido demasiados *filósofos* de los fundamentos.

33 La inclusión de un "interludio" con dos textos de Pólya –treinta años después de haber sido escritos– es indicativa de la mansedumbre que se había venido dando en la filosofía por acercarse a la "práctica matemática". Por supuesto, como a menudo sucede con la academia anglosajona, es patente el desconocimiento de aquello que no ha sido traducido al inglés: hablar de "práctica" matemática sin mencionar a Lautman o a De Lorenzo es un verdadero contrasentido, del que se valen sin embargo con tranquilidad los filósofos de lengua inglesa.

Saunders MacLane

Mathematics. Form and Function (New York: Springer, 1986) resume la visión de un matemático sobresaliente de la segunda mitad del siglo XX. El grueso de la monografía –que debe verse más como una presentación, a vuelo de pájaro, de la matemática clásica y moderna, que como un volumen de filosofía matemática– se enfrenta de lleno a la herencia de Galois y Riemann, y provee excelentes introducciones a temas centrales de la matemática: grupos, estructuras algebraicas, análisis complejo, topología. Las matemáticas contemporáneas aparecen alrededor de la teoría de categorías (MacLane fue uno de sus fundadores) y de la teoría de haces (paradigma de los métodos contemporáneos). El capítulo 12, "Mathematical network", explora la progresiva emergencia de las construcciones matemáticas (orígenes-ideas-versiones formales), y el incesante *back-and-forth* entre (A) temas, especialidades, subdivisiones del saber matemático, y (B) tránsitos, transformaciones, cambios. Para MacLane, las construcciones matemáticas surgen gracias a una *red* de analogías, ejemplos, pruebas y saltos de perspectiva, que permite encontrar y definir ciertos *invariantes* en medio del cambio. Si no hay una "verdad" absoluta, externa a la red, existen no obstante múltiples *grados de relevancia*, de corrección, aproximación e iluminación, *dentro* de la red. El acorde armónico de esos grados, superando múltiples obstrucciones, y construyendo con lo residual nuevos conceptos, se convierte en una de las tareas centrales de la matemática.

Gian-Carlo Rota

Indiscrete Thoughts (Basel: Birkhäuser, 1997) conforma una serie irreverente de reflexiones, de gran interés[34], de otro matemático determinante en la segunda mitad del siglo XX. Se trata de una compilación desigual que incluye anécdotas, fragmentos de historia, reflexiones matemáticas y filosóficas, apuntes críticos y fulgurantes ideas incendiarias. Ante todo, y en el orden mismo de la compilación, Rota dedica un amplio espacio a la descripción de figuras de matemáticos (Artin, Lefschetz, Jacob Schwartz, Ulam) como individuos creadores. Para Rota, la matemática emerge en entornos vivenciales y académicos muy específicos (hermoso texto sobre "The Lost Café"), dando lugar a una disciplina dinámica, oscilante, fluctuante, con múltiples tensiones concretas, indisolublemente ligadas a personalidades bien acotadas en el tiempo y el espacio. El vaivén entre una matemática genérica y sus encarnaciones particulares, y la idea de que "la matemática no es más que una disciplina histórica *par excellence*" (algo que Jean Cavaillès recalcaba con fuerza medio siglo antes), subyacen en

34 Agradezco aquí las enseñanzas de Alejandro Martín y de Andrés Villaveces, quienes me explicaron en una tarde memorable la importancia de las ideas de Rota, varias de las cuales retomaremos (por otros caminos) en la tercera parte de este ensayo. Fabrizio Palombi, *La stella e l'intero. La ricerca di Gian-Carlo Rota tra matematica e fenomenologia*, Torino: Boringhieri, 2003, presenta varias ideas de suma relevancia para nuestro enfoque, que comentaremos más adelante.

todo el pensamiento de Rota, y permean algunas de sus concepciones más originales: 1. una "primacía de la identidad" que busca definir la "esencia" de un objeto como su red misma de superposiciones factuales y que ayudaría a substituir una caduca ontología matemática (la "comedia de la existencia" de los objetos matemáticos); 2. una reapropiación de la noción husserliana de *Fundierung* para reentender los tránsitos de la matemática entre lo factual y lo funcional; 3. una fenomenología de la matemática abierta a formas del hacer matemático (belleza, variedades de prueba, imaginación) usualmente abandonadas por las perspectivas tradicionales de la filosofía matemática.

El cáustico y violento artículo "The Pernicious Influence of Mathematics Upon Philosophy" devela los excesos de una filosofía de la matemática orientada hacia malabarismos formales, y atravesada por diversos "mitos" que poco tienen que ver con la práctica matemática: ilusión de precisión, absolutismo axiomático, ilusión de permanencia, reducibilidad conceptual. Paradoja si la hay, Rota observa que la filosofía analítica, "perniciosamente influida" por la lógica clásica y por la teoría de conjuntos, se ha *vuelto del revés* y ha abandonado la alta creatividad matemática, ya sea geométrica, topológica, diferencial, algebraica o combinatoria, alejándose así del centro real de la disciplina que la ayudó a emerger. La filosofía de la matemática debe entonces volver a examinar, sin prejuicios o tomas de posición teóricas preestablecidas, el *espectro fenomenológico de la actividad matemática*. Aquí, la lectura de Rota –en tres artículos centrales sobre "La fenomenología de la verdad matemática", "La fenomenología de la belleza matemática", "La fenomenología de la prueba matemática", y en cuatro textos complementarios, "La primacía de la identidad", "*Fundierung* como concepto lógico", "Kant y Husserl" y "El Barbero de Sevilla o la precaución inútil"– plantea algunas de las problemáticas imprescindibles a las que debería abocarse una filosofía de la matemática orientada a la comprensión "real" (en el sentido de Corfield que hemos venido usando) de la disciplina: la emergencia de la creatividad matemática, la matemática entendida como historia de sus problemas, las variedades de prueba y la evolución de los conceptos, los enlaces entre los "hechos" de la matemática y sus constantes reinterpretaciones funcionales, las superposiciones y las iteraciones no reduccionistas de los objetos matemáticos, los tránsitos ineludibles entre formas de análisis y formas de síntesis. El estilo de Rota –breve, decantado, cáustico– no da lugar a una elaboración sistemática de sus ideas, pero desarrollaremos algunas de ellas en la tercera parte de este trabajo.

Alain Badiou

L'Être et l'Événement (París: Seuil, 1988) provee un ejemplo sofisticado de cómo construir *nuevas* meditaciones filosóficas a partir de una observación detenida de aspectos de las matemáticas avanzadas[35]. Badiou explora

35 Badiou se declara explícitamente admirador y heredero de Lautman. Es un caso único

cuidadosamente el *forcing* de Cohen –antecediendo, en la profundidad y en la originalidad de su análisis, a los matemáticos mismos– y encuentra en los procedimientos de genericidad utilizados en *forcing* uno de los grandes apoyos contemporáneos que permiten reintegrar sólidamente lo múltiple en lo uno. La consideración de la hipótesis del continuo, contrastada entre la indiscernibilidad (teorema de Easton) y el control lingüístico (universo construible de Gödel), exhibe en detalle algunas oscilaciones del pensamiento matemático. Una profunda *subversión ontológica* se sugiere: la identificación de "matemáticas" (ciencia de las multiplicidades puras) y "ontología" (ciencia de lo que es, *en tanto* que es), gracias a la fuerza misma de la teoría axiomática de conjuntos, que permite nombrar *todas* las multiplicidades de las matemáticas y desarrollar su estudio (jerárquica, compleja, demostrativamente) en tanto que "son". El texto de Badiou incluye una gran cantidad de "narraciones de demostración" (término del autor: demostraciones de-construidas desde el lenguaje formal y re-construidas en un lenguaje conceptual y filosófico) que proveen un panorama inusitadamente amplio de la teoría de conjuntos moderna y contemporánea.

En su *Court traité d'ontologie transitoire* (París: Seuil, 1998), Badiou extiende su "subversión" ontológica, incluida una incisiva re-visión de la teoría de categorías y de la teoría de *topos* elementales. La construcción de un *diálogo* entre grandes figuras de la filosofía (Aristóteles, Platón, Descartes, Spinoza, Leibniz, Kant), filósofos contemporáneos (Deleuze), creadores (Mallarmé) y matemáticos modernos y contemporáneos (Cantor, Gödel, Cohen, Lawvere) es sumamente original. Se sugiere una primacía de la matemática "real" y una subordinación consiguiente de la lógica –topos y lógicas *asociadas*, clases de estructuras y lógicas asociadas, emergencia de la lógica geométrica, vaivén lógico irreducible entre lo global y lo local–, que debería generar importantes "giros" en la filosofía matemática, allende la filosofía analítica y la filosofía del lenguaje. Una orientación platónica no trivial (es decir, no reducida a la existencia de ideas y objetos matemáticos "externos"), más acorde con la "condición matemática moderna", se resume en tres puntos: 1. La matemática es un pensamiento (lo que conlleva, en oposición con el *Tractatus* de Wittgenstein, la existencia de procesos dinámicos que no pueden ser reducidos al lenguaje); 2. La matemática, como todo pensamiento, sabe explorar sus linderos (indecidibilidad, indiscernibilidad, genericidad: lo que lleva la irreducibilidad de las matemáticas a un conjunto de intuiciones o reglas fijadas por adelantado); 3. Las cuestiones matemáticas de existencia solo remiten a la consistencia inteligible de lo pensable (lo que conlleva una marcada indiferencia por fundamentos "últimos", y la adopción, en cambio, de un criterio de "extensión maximal" para todo lo "composible", más afín

de reconocimiento y de labor compartida, aunque el espectro matemático que cubre Lautman sea mucho más amplio. Tanto Lautman como Badiou intentan, por lo demás, volver a reentender a Platón desde las exigencias del pensamiento contemporáneo.

a la riqueza de la teoría de modelos contemporánea). La matemática –y la ontología, con la que se identificaría– se entiende entonces como un haz sofisticado de métodos y de construcciones para explorar sistemáticamente lo *transitorio*.

Penelope Maddy

No puede ser mayor el contraste de los trabajos de Badiou y de Maddy, aunque ambos se remitan al *mismo* espectro matemático: la teoría de conjuntos a lo largo del siglo XX. En *Realism in Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 1990), Maddy explora la teoría descriptiva de conjuntos, los axiomas de grandes cardinales, la hipótesis del continuo, y resume en detalle múltiples aportaciones de figuras señeras en el área, desde Borel y Lusin, hasta Martin, Moschovakis y Solovay. Maddy muestra que la riqueza del universo conjuntista (nuevos métodos y modelos, nuevas conexiones y perspectivas, posibilidad de obtener consecuencias verificables) permite sustentar un cierto "realismo" cercano a las ideas de Gödel y desmontar el "dilema" de Benacerraf, ya que las nociones de causalidad asociadas al dilema dejan de valer en las pruebas avanzadas de consistencia relativa en la teoría de conjuntos. Aunque Maddy encuentra cierta estabilidad conjuntista allí donde Badiou resalta sobre todo una continua transición, debe señalarse que ambos, al mirar específicamente las matemáticas de *su* momento, consiguen proponer *nuevas* preguntas y resoluciones en la filosofía matemática (disolución del dilema de Benacerraf, programa de una ontología transitoria). La labor del filósofo atento a las matemáticas de su época no es entonces desdeñable.

En *Naturalism in Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 1997), Maddy explora el estatus de los axiomas avanzados de la teoría de conjuntos, desde el doble punto de vista del realismo (existencia de universos objetivos de conjuntos) y del naturalismo (suficiencia interna de la matemática y de la teoría de conjuntos, sin requerir justificantes externos). Maddy revisa diversos axiomas de gran interés matemático (elección, constructibilidad, determinación, medibilidad, supercompacidad, etc.), y aparecen extensamente en su monografía los mayores constructores modernos de la teoría de conjuntos (Cantor, Dedekind, Zermelo, Gödel), así como algunos de sus mejores practicantes contemporáneos (Cohen, Martin, Moschovakis, Woodin, etc.). Una observación enfática de la *práctica* recorre todo el texto; una visión naturalista de la teoría de conjuntos se sustenta en la contemplación directa de cómo los axiomas conjuntistas emergen, se ponen a prueba y se combinan entre sí *dentro* de las redes matemáticas[36] (sometiéndose a diversos controles combinatorios, deductivos, conceptuales, armónicos, hasta descartarse o asumirse parcialmente). La búsqueda de

36 Si el término explícito "Mathematics" aparece en los dos títulos de las monografías de Maddy, esta se restringe no obstante a la teoría de conjuntos, un fragmento de la investigación matemática.

axiomas apropiados y de criterios de plausibilidad puede verse entonces autosuficiente, sin necesidad de invocar una ontología externa (un ejemplo brillante de tal metodología se presenta en el capítulo final, al estudiar el axioma de constructibilidad V = L y mostrar que el axioma se contrapone internamente con principios básicos de maximalidad, ubicuos en la práctica matemática).

Gilles Châtelet

Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie (París: Seuil, 1993) encara directamente los problemas fundamentales de la movilidad del pensamiento matemático, y de sus *ósmosis naturales* con la física y con la filosofía. El trabajo de Châtelet maneja algunas perspectivas sui géneris dentro del espectro de la filosofía matemática: 1. Una apertura a una suerte de *primacía de lo visual* dentro de la práctica matemática (concretando así, en la matemática, parte del programa fenomenológico general de Merleau-Ponty)[37]; 2. Una sensibilidad especial a la *emergencia movible* de las "cosas" y los conceptos matemáticos, gracias a un estudio de los *gestos* y los procesos en el lindero de lo virtual y lo actual; 3. Una atención cuidadosa y un análisis fino de las *redes de metáforas* que acompañan al hacer matemático, y que gobiernan sus enlaces con la física y la filosofía; 4. Un estudio detallado, con pormenorizados casos concretos, de los modos de *articulación* del saber matemático y de sus *balances dialécticos*. Los títulos de los cinco capítulos del trabajo son indicadores de la originalidad de Châtelet: "El encanto de lo virtual", "La tela, el espectro y el péndulo. Horizontes de aceleración y desaceleración", "La fuerza de la ambigüedad: los balances dialécticos", "La captura de la extensión de Grassmann. Geometría y dialéctica", "El espacio electrogeométrico". El abanico de ejemplos de Châtelet se concentra en el periodo moderno (Argand, Cauchy, Poisson, Grassmann, Faraday, Maxwell, Hamilton, entre otros), pero recurre también a entrelazamientos intemporales (Oresme, de Broglie). En la introducción, Châtelet convoca una larga cita de André Weil, en la cual este explica detenidamente el rol primordial de las "analogías oscuras" en la investigación matemática, un umbral de penumbra creativa que Châtelet explora acercándose a los "gestos que *inauguran* dinastías de problemas", a las articulaciones y torsiones entre razón e intuición, a la "captura racional de las alusiones", al despliegue estructural y jerárquico de los diagramas de pensamiento. El cuarto capítulo es una suerte de joya dentro de la filosofía matemática. Châtelet revisa detenidamente cómo construye Grassmann

---

37 Sobre una recuperación del diagrama para la filosofía de las matemáticas, siguiendo la clara línea de filiación francesa Lautman-Deleuze-Châtelet, véase *Penser par le diagramme. De Gilles Deleuze à Gilles Châtelet* (ed. Noëlle Batt), *Théorie-Littérature-Enseignement* 22 (2004), Saint-Denis: Presses Universitaires de Vincennes, 2004, y *Virtual Mathematics. The Logic of Difference* (ed. Simon Duffy), Bolton: Clinamen Press, 2006. En esta última recopilación se incluye, entre diversos artículos dedicados a la lógica y la matemática en Deleuze, un texto póstumo de Châtelet (editado por Charles Alunni), "Interlacing the singularity, the diagram and the metaphor".

la emergencia "sincrónica de lo intuitivo y lo discursivo" en una unidad viva que no es ni *a priori*, ni *a posteriori*, cómo la dialéctica engendra nuevas formas a través de una cuidadosa jerarquía de escalas dentro de los productos exteriores de Grassmann, cómo el estilo mismo de Grassmann conlleva un natural acercamiento a los procesos que permiten captar la autorreferencia ("comprensión de la comprensión"), cómo las aparentes oposiciones continuo/discreto e igual/diferente consisten en *flujos* de la inventividad matemática que ayudan a articular sus distintos saberes parciales (números, combinatoria, funciones, teoría de la extensión); yendo aún mucho más allá, una sección magistral de 30 páginas sobre los productos de Grassmann explica, con toda la fuerza del detalle y con la presencia constante de diagramas, las grandes líneas de tensión del sistema de Grassmann explicitadas en la primera parte del capítulo. Todo el trabajo constituye un aporte mayor a la filosofía de la matemática, un aporte sobre el cual volveremos repetidamente en la tercera parte de este estudio y que puede considerarse tal vez, a nuestro entender, como el más original presentado desde la obra de Lautman.

Frédéric Patras

La pensée mathématique contemporaine (París: PUF, 2001) provee un salto importante en el intento de acercarse a las matemáticas contemporáneas. El espectro recorrido no es ya el universo de la teoría de conjuntos –que, al fin y al cabo, es el espectro *usual*, a pesar de la originalidad de Badiou o la maestría de Maddy–, sino que incluye vertientes realmente matemáticas (álgebra abstracta, geometría algebraica, topología, teoría de categorías) e incorpora el surgimiento de las matemáticas modernas (capítulos 1-4, con excelentes introducciones a Galois, al Dedekind algebraico y al Hilbert "universal") y aspectos de las obras de figuras centrales de la matemática contemporánea (capítulos 5-8: Bourbaki, Lawvere, Grothendieck, Thom). El capítulo 7, dedicado a Grothendieck, es particularmente valioso, debido a su singularidad misma dentro de los tratados de filosofía matemática: el *hecho* de que el matemático probablemente más importante de la segunda mitad del siglo XX no aparezca nunca considerado en serio en la "filosofía matemática" debe considerarse una monumental aberración, a la que Patras intenta poner fin. El autor muestra que *la comprensión de los modos de emergencia de la creatividad matemática debe constituir una de las tareas indispensables de la filosofía matemática*, e indica que algunas de las grandes fuerzas subyacentes en la obra de Grothendieck (esquematización estética, definición universal, limpieza lógica, "inocencia" inventiva, "escucha" de la "voz de las cosas", dialéctica yin-yang) pueden ayudar a entender la imaginación matemática como forma de pensamiento complejo, donde se entrelazan múltiples polaridades estructurales y tensiones fronterizas.

David Corfield

Desde su polémico título, *Towards a Philosophy of Real Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press, 2003) intenta romper los prejuicios normativos al uso en la filosofía matemática, en particular las "creencias entre filósofos de que el estudio de las mayores corrientes matemáticas recientes es innecesario". Una amplia introducción presenta una argumentada defensa del valor de una perspectiva filosófica orientada hacia las matemáticas no elementales, y exhibe algunos de los problemas mayores que emergen en esa aproximación, pero que, en cambio, el "filtro fundacionalista" deja de detectar: el estatuto de los *bordes* estructurales de las matemáticas (allende binarismos y alternativas del tipo "todo o nada"), la *conectividad* de las diferentes teorías matemáticas, la *evolución* de los conceptos matemáticos, la *contingencia* del pensamiento matemático, la progresiva *riqueza recursiva* de las construcciones matemáticas. El subtítulo de la introducción –"Un papel para la historia"– indica el camino adoptado por Corfield: un entronque de matemáticas, filosofía e historia, donde las consideraciones actuales del desarrollo de la disciplina adquieren una relevancia *real* para la filosofía de las matemáticas. De hecho, el texto aborda diversos temas de las matemáticas contemporáneas –pruebas automáticas de teoremas, modos de indeterminación, teoría de grupoides, n-categorías– y elabora un modelo epistemológico donde un entreveramiento de redes y jerarquías ayuda a explicar el desarrollo a la vez multivalente y unitario de las matemáticas avanzadas. Los capítulos 2 y 3 se acercan a los autómatas lógicos y sirven para contrastar las limitantes de una prueba automática con la creatividad matemática de punta (capítulo 4), donde el papel de la analogía resulta imprescindible para inventar nuevos conceptos, técnicas e interpretaciones (valiosos ejemplos alrededor de Riemann, Dedekind, Weil, Stone). Los capítulos 5 y 6 revisan problemas de plausibilidad, incertidumbre y probabilidad en las matemáticas (teorías bayesianas) y en la ciencia en general (campos cuánticos). Los capítulos 9 y 10 se aproximan a desarrollos matemáticos en curso (grupoides, n-categorías) y a las correspondientes obras de investigadores matemáticos actuales (Brown, Baez), demostrando concretamente cómo puede observarse una matemática *en gestación* desde un punto de vista filosófico donde se disuelven ciertos obstáculos ontológicos y epistemológicos tradicionales. Los capítulos 7 y 8 enfocan el problema del crecimiento de las matemáticas (apreciación y crítica de Lakatos), la importancia de una *vida conjunta* de prácticas matemáticas opuestas, y la consiguiente necesidad de no descartar en la filosofía de la matemática los supuestos *residuos* de concepciones matemáticas que no se encuentren en boga.

Corfield intenta hacer oír la vida compleja de las matemáticas (para poder así "escuchar lo que las cosas dicen", diría Grothendieck en sus *Récoltes et semailles*), más allá de que en la "actual filosofía de las matemáticas pueda decirse sin temor de contradicción que la filosofía es la que dicta la agenda". Según Corfield, una saludable inversión de perspectivas, hasta poder llegar a construir un *juste milieu*, podría llevar a la filosofía actual de las matemáticas a emular la apertura mental del mejor Russell, y a

> (1) creer que nuestra filosofía actual no es adecuada para darle un sentido correcto a las matemáticas contemporáneas; (2) confiar en que algunos matemáticos pueden ayudarnos a obtener un mejor tratamiento filosófico; (3) creer que la imagen emergente así obtenida puede revitalizar a la filosofía.

Algunos ejemplos estudiados por Corfield indican cómo el fijar la atención en *más matemáticas* (y no necesariamente en más filosofía, como podría taxativamente pensarse) puede ayudar a la filosofía: las álgebras de Hopf que se sitúan en el corazón de las razones de la aplicabilidad de las matemáticas a la física cuántica, los grupoides que presentan novedosos enlaces entre simetría (equivalencia abstracta) y asimetría (no conmutatividad), o los lenguajes categóricos de Makkai que eliminan cuestiones ontológicas mal planteadas. En conjunto, el trabajo provee un interesante *contrapeso* a las fuerzas dominantes en filosofía de la matemática, muy atentas al lenguaje y más alejadas de las matemáticas "reales". El texto concluye con una advocación importante para la filosofía actual de las matemáticas: "Las matemáticas han sido, y continúan siendo, un soberbio arsenal para los filósofos. No lo desperdiciemos".

2.3 Más filosofía, menos matemáticas

Hemos indicado, en las secciones 2.1 y 2.2, cómo diversos filósofos, matemáticos e historiadores se han aproximado a las matemáticas avanzadas –en sus tres grandes ámbitos: clásico, moderno y contemporáneo–, abriendo así nuevas perspectivas para la filosofía matemática, inexistentes o "borrosas" desde el punto de vista de los fundamentos o de las matemáticas elementales. La pretensión de agotar los horizontes de la filosofía matemática con lo "fundamental" y lo "elemental", y el *no querer ver* en las matemáticas modernas y contemporáneas todo un arsenal de problemáticas *irreducibles* a ejemplos elementales o discusiones lógicas (*capítulo 1*), ha limitado el alcance de la filosofía matemática tradicional, heredera de la filosofía analítica. Sin embargo, aunque ha dejado de lado el universo de las matemáticas avanzadas, la filosofía matemática tradicional ha sabido acotar complejos problemas ontológicos y epistemológicos (alrededor de las nociones de número, conjunto y demostración), que luego ha tratado con gran precisión.

Una visión, amplia y al día, de la filosofía matemática tradicional se encuentra en la imponente compilación *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (ed. Shapiro, Oxford: Oxford University Press, 2005). Como veremos al resumir el tratado, el enfoque es nítidamente analítico, lógico y anglosajón. La ocurrencia de la matemática moderna o contemporánea, en la acepción de los términos que hemos venido aquí precisando, y la ocurrencia de los grandes forjadores del pensamiento matemático moderno y contemporáneo –Galois, Riemann o Grothendieck, por solo nombrar las figuras imprescindibles– son mínimas o inexistentes[38]. En cambio, otra de las figuras fundamentales de la matemática moderna, Georg Cantor, es ampliamente estudiada a lo largo del volumen, subrayando así el interés de los filósofos analíticos por la teoría de conjuntos. El abanico de la *matemática* sobre la cual se reflexiona en el volumen se reduce entonces a un retículo de lógicas y a la teoría clásica de conjuntos. Esta deformación curiosa del espectro matemático, que se ha venido repitiendo desde hace décadas en el mundo anglosajón, no debería seguir aceptándose. Otra cosa sería si, con algo más de humildad, el volumen en cuestión se hubiese denominado *The Oxford Handbook of Analytical Philosophy of Logic*.

Después de una excelente introducción general de Shapiro (donde extiende apartes de su texto previo *Thinking about mathematics*..., mencionado en nuestra *Introducción*), la compilación incluye un resumen (Shabel) de la filosofía de la matemática entre Descartes y Kant, un capítulo sobre empirismo y positivismo lógico (Skorupski), una introducción a la filosofía de Wittgenstein sobre lógica y "matemáticas" (Floyd), tres capítulos alrededor de versiones del logicismo (Demopoulos & Clark, Hale & Wright, Rayo), un texto sobre el formalismo (Detlefsen), tres capítulos sobre formas del intuicionismo (Posy, McCarty, Cook), un texto sobre Quine (Resnik), dos capítulos sobre naturalismo (Maddy, Weir), dos capítulos sobre nominalismo (Chihara, Rosen & Burgess), dos capítulos sobre estructuralismo (Hellman, MacBride), un texto sobre el problema de la aplicabilidad de las matemáticas (Steiner), un texto sobre predicatividad (Feferman), dos capítulos sobre consecuencia lógica, modelos y constructibilidad (Shapiro, Prawitz), dos capítulos sobre lógica de la relevancia (Tennant, Burgess) y dos capítulos sobre lógica de orden superior (Shapiro, Jané). Todos los trabajos demuestran un gran nivel de análisis, extenso rigor argumentativo y gran profesionalismo. Sin embargo, parece que se hubiese creado una amplia red de referencias cruzadas entre los trabajos profesionales de los autores y el estrato de lógicas ligados a esos trabajos: una red secundaria que hubiese *substituido* a la matemática primaria subyacente. Una vez asumida esa red interesante y compleja –mediante formas lógicas, problemas asociados de fundamentos, detalladas disquisiciones filosóficas y autorreferencias entre los especialistas–, muy pocos de los autores incluidos en el *Handbook* resultan, no obstante, suficientemente autocríticos para pensar que, *tal vez*, otras muchas formas de la matemática, *posiblemente aún más interesantes y complejas*, han desaparecido de sus consideraciones. Por supuesto, no se puede (ni debe) pedir al especialista que abarque más allá de su campo

38 El índice (analítico y onomástico a la vez) que aparece al final del volumen solo referencia en dos páginas (de las 833 que posee el volumen) a Galois y Riemann; Grothendieck ni siquiera aparece. Aunque el índice es poco confiable (pues, por ejemplo, en el artículo de Steiner, que se ocupa del problema de la aplicabilidad de las matemáticas, Riemann y Galois se estudian con mayor detenimiento), es suficientemente indicativo de una situación de hecho.

de conocimiento; pero tampoco se puede (ni debe) confundir al estudiante o al profesional interesado en el tema, haciendóle creer que el tratado cubre la "filosofía de las matemáticas y la lógica". La *desaparición de las matemáticas* y su reducibilidad a la lógica constituyen la más desafortunada perspectiva global que ha impuesto (consciente o inconscientemente) la filosofía analítica anglosajona.

Resulta sorprendente que, cuarenta años después de la compilación básica *Philosophy of mathematics* (1964) de Benacerraf y Putnam, los problemas tratados en la nueva compilación de Shapiro sigan siendo los mismos que aquellos tratados en las cuatro partes de la compilación de 1964: fundamentos, objetos matemáticos, verdad, conjuntos. Las herramientas incluidas en la compilación de Shapiro incluyen una red mucho más amplia y plural de lógicas, y nuevas perspectivas unificadoras. Pero los gigantescos avances de la matemática en los últimos cincuenta años brillan por su ausencia. De nuevo, resulta como si la matemática no evolucionara, y como si los problemas de la filosofía de la matemática se hubiesen fijado en el tiempo, dejando solo espacio a las *variaciones de los comentaristas*. Esperamos mostrar, con las partes segunda y tercera de este ensayo, que se trata de una situación insostenible.

Con respecto a la compilación de Benacerraf y Putnam, la compilación de Shapiro abre nuevas perspectivas en dos ámbitos particulares de la filosofía matemática: naturalismo y estructuralismo. En su artículo "Tres formas de naturalismo" (*Oxford Handbook*... op. cit., pp. 437-459), Penelope Maddy explora las raíces del naturalismo en Quine, y las modificaciones posteriores de las posiciones quineanas en Burgess y en la obra misma de Maddy. La posición naturalista autorreferencial de Quine, según la cual los fundamentos de una ciencia y sus fragmentos de certeza deben buscarse en la ciencia misma, y no en otra filosofía primera, externa y ajena a la ciencia, incitan una fuerte mirada *intramatemática* en Maddy, según la cual un filósofo naturalista de las matemáticas no debe asomarse a debates metafísicos extramatemáticos, sino seguir con cuidado una dinámica de formación de los conceptos *dentro* de su propia disciplina. Maddy ha realizado con vigor y originalidad ese programa *dentro de la teoría de conjuntos*, mostrando, en particular, que la pretendida posición naturalista quineana, en favor de un universo reducido de conjuntos (V = L), no se compadece de los argumentos "naturales" en favor de los grandes cardinales que manejan los creadores centrales en la teoría (Martin, Woodin, Shelah, entre otros). Sin embargo, la "matemática" que aquí maneja el filósofo se restringe, una vez más, a formas de la lógica y de la teoría de conjuntos, sin incursionar en dominios geométricos, algebraicos o diferenciales, y sin acercarse a mencionar a ninguno de los medallistas Fields (excepto, por supuesto, Cohen) que, se supone, han estado cambiando los rumbos de la disciplina en los últimos cincuenta años.

En su artículo "Estructuralismo" (*Oxford Handbook*... op. cit., pp. 536-562), Geoffrey Hellman propone cuatro versiones de un enfoque estructural en las matemáticas (estructuralismo conjuntista, estructuralismo genérico, estructuralismo categórico y estructuralismo modal), y compara las ventajas de cada versión con respecto a ciertos problemas filosóficos que surgen dentro de las vertientes estructurales mismas: 1. Contrastación "conjunto-estructura" y escogencia de conceptos-axiomas naturales; 2. Manejo de "totalidades"; 3. Emergencia de "ontologías-epistemologías" intratables; 4. Manejo de estructuras rígidas y no rígidas desde una perspectiva filosófica; 5. Presencia de circularidades en las estructuras; 6. Problemas de subdeterminación de las teorías; 7. Presencia de substratos conceptuales primitivos no definidos. Las conclusiones de Hellman (cuidadosamente delimitadas, al estilo de todos los autores del *Handbook*, con sólidos lineamientos argumentales y con un mínimo de casos matemáticos) señalan que una *mixtura de estructuralismo categórico y modal* podría responder de la mejor manera posible a los problemas enfrentados en el artículo. Veremos, en la tercera parte de este ensayo, cómo construir y *extender* en gran medida esa mixtura, sugerida por Hellman y *reclamada* por los extensos estudios de caso que realizaremos en la segunda parte.

Bajo el lema "más filosofía, menos matemáticas" puede cobijarse (muy a *grosso modo*) la escuela de filosofía analítica de las matemáticas, incluyendo, en particular, la gran mayoría sus practicantes anglosajones (por supuesto, siempre, con importantes excepciones[39]). Ha sido una opción perfectamente válida, pero sin duda también restrictiva. El *peligro* –que ha existido, sigue existiendo, y contra el cual Rota era enfático– está en que esa opción se ha convertido en muchos medios académicos como la *única vía* posible. El regreso a mirar de nuevo la complejidad del mundo matemático –que Lautman lograra admirablemente, que consiguieron muchos de los autores que recorrimos en la sección 2.2, y que Corfield plantea de nuevo como un *imperativo*– debe reequilibrar la balanza, y establecer un nuevo plano de mayor igualdad: "*tanta* matemática *como* filosofía". La segunda parte de este trabajo intenta cubrir la izquierda de la balanza; la tercera parte, la derecha.

39 Además de los autores mencionados en la sección 2.2, pueden señalarse otros filósofos e historiadores anglosajones que intentan cubrir un amplio espectro matemático (metodológico, técnico, creativo), como Jeremy Gray, Michael Hallett, Mark Steiner o Jamie Tappenden, entre otros.

Capítulo 3

Hacia una filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas

Hemos visto en la introducción y en los capítulos anteriores que una contrastante (y a menudo contradictoria) *multiplicidad* de puntos de vista recorre el ámbito de la filosofía de las matemáticas. También, hemos delimitado (en una primera instancia que se irá refinando a lo largo del trabajo) al menos cinco características que separan las matemáticas modernas de las matemáticas clásicas, y otras cinco características que distinguen las matemáticas contemporáneas de las matemáticas modernas. Dentro de ese intento de conceptualización global de ciertas tendencias matemáticas en épocas históricas bien definidas, ha resultado patente la inmensa *variedad* del espectro técnico que debe recorrerse. No obstante, diversos reduccionismos han querido acotar tanto la multiplicidad filosófica, como la variedad matemática en juego. Lejos de *un* tipo de apuesta filosófica omniabarcadora o de *una* reorganización dada de la matemática, que se intenten poner en correlación univalente, parece fundamental tener que considerar ahora la necesidad de construir correspondencias *multivalentes* entre la filosofía o las filosofías y la matemática o las matemáticas.

Coherentemente con esta situación, no adoptaremos de entrada ninguna posición filosófica *a priori*, antes de haber observado detenidamente el panorama de las matemáticas contemporáneas. Asumiremos –en cambio– una precisa armazón metodológica que, según creemos, nos podrá ayudar a observar mejor ese panorama. Es claro que esa *esquematización* metodológica también influye en nuestros modos de conocer, pero confiamos en que las distorsiones pueden ser *controladas*, ya que la metodología de la mirada que asumiremos y el espectro que se pretende observar se acercan bastante entre sí. La conciencia de la multiplicidad filosófica y matemática en juego requiere de hecho un instrumentario *minimal* que sea particularmente sensible al tránsito de lo múltiple, que pueda registrar adecuadamente esa multiplicidad, y que permita entender sus procesos de traducción y transformación. A estos efectos, adoptaremos ciertas pautas epistemológicas minimales proporcionadas, en filosofía, por el pragmati(ci)smo de Peirce, y, en matemáticas, por la teoría de categorías.

Una visión medianamente congruente con la multiformidad del mundo debe integrar, al menos, tres órdenes de aproximaciones: un nivel *diagramático* –esquemático y reticular– donde se bosquejan los esqueletos de las múltiples correlaciones entre los fenómenos, un nivel *modal* –gradual y mixto– donde los esqueletos relacionales adquieren diversas "tinturas" de tiempo, lugar e interpretación, y un nivel *fronterizo* –continuo– donde se combinan progresivamente las redes y las mixturas. En esa "arquitectura" de la visión, los niveles nunca se encuentran fijos o completamente determinados; en el sentido de Lautman, se articulan diversas saturaciones contextuales (pues algo mixto y saturado en un nivel dado puede verse como esquelético y en proceso de saturarse en otro contexto de mayor complejidad) y una dinámica frontera del saber refleja la ondulante frontera del mundo. Una adecuada integración de diagramas, correlaciones, modalidades, contextos y fronteras entre el mundo y sus diversos intérpretes es el objeto primordial de la *pragmática*. Lejos de reducirse al estudio de correlaciones utilitarias en contextos prácticos de acción-reacción –degeneración del término "pragmática" que corresponde a su despectivo uso actual– la pragmática intenta reintegrar las fibras diferenciales del mundo, insertando explícitamente el amplio espectro relacional y modal de las fibras *dentro* de la integral buscada. La atención técnica a contextualizaciones, modulaciones y fronteras otorga a la pragmática –en el sentido de Peirce, su fundador– un fino y peculiar timbre metodológico. Al igual que la visión, como la música, se beneficia de una modulación integral donde se entrelazan tonos y tonalidades para realzar su textura, la pragmática se beneficia de un atento registro de contaminaciones y osmosis entre categorías y fronteras del conocer para articular coherentemente la diversidad.

Diversas obstrucciones naturales se encuentran en el camino de cualquier sistema arquitectónico de visión que pretenda reintegrar lo múltiple en lo uno sin perder la multivalente riqueza de lo diferencial. Una de esas claras obstrucciones consiste en la imposibilidad de que tal sistema sea estable y definitivo, pues ninguna angulación dada puede capturar a todas las demás. En efecto, desde un punto de vista lógico, cada vez que un sistema se observa a sí mismo –perspectiva necesaria si pretende capturar el "todo" que le incluye– se desata una dinámica autoreferencial que jerarquiza sin fin el universo. Así, una arquitectónica pragmática de la visión solo puede ser *asintótica*, en un sentido muy específico donde se entrelazan evolución, aproximación y convergencia, pero sin requerir de un límite posiblemente inexistente. El que una acumulación "interna" de vecindades pueda señalar una orientación sin tener que invocar un ente "externo" que represente un supuesto "final" –*el poder orientarnos dentro de lo relativo sin tener que recurrir a lo absoluto*– constituye un hecho de enormes consecuencias, cuya plena fuerza creativa y pedagógica está apenas empezando a ser apreciada dentro del mundo contemporáneo.

La máxima pragmática –o "pragmaticista" ("un nombre suficientemente feo como para poder escapar de los plagiarios") como la denominaría más tarde Peirce para distinguirla de otras interpretaciones conductistas, utilitaristas o sicologistas– aparece formulada varias veces a lo largo del desarrollo intelectual del polifacético sabio norteamericano. El enunciado usualmente citado es de 1878, pero otros enunciados más precisos aparecen en 1903 y 1905:

> Considere cuáles efectos que podrían concebiblemente tener relevancia práctica concebimos que tenga el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de esos efectos es nuestra entera concepción del objeto[40].
>
> El pragmatismo es el principio según el cual todo juicio teórico expresable en una sentencia en modo indicativo es una forma confusa de pensamiento cuyo único sentido, si lo tiene, yace en su tendencia a forzar una correspondiente máxima práctica expresable como una sentencia condicional cuya apódosis está en modo imperativo[41].
>
> El sentido entero de cualquier símbolo consiste en el total de todos los modos generales de conducta racional que, condicionalmente sobre todas las diferentes circunstancias posibles, se seguiría al aceptar el símbolo[42].

En el enunciado de 1905 se enfatiza en que el conocimiento de los símbolos se obtiene siguiendo algunos "modos generales", y recorriendo un espectro de "diferentes circunstancias posibles". Esta modalización de la máxima (subrayada en la torpe repetición de lo "concebible" en 1878) introduce en el sistema peirceano la problemática de los enlaces entre los *posibles* contextos de interpretación que pueden tenerse para un símbolo dado. En el enunciado de 1903 se observa, por un lado, que toda máxima práctica debe poder expresarse en la forma de un condicional cuyo consecuente *necesario* debe poder ser adecuadamente contrastado, y por otro lado, que cualquier juicio teórico indicativo, dentro de lo *actual*, sólo puede ser precisado mediante una serie de diversas prácticas asociadas al juicio.

Ampliando estos preceptos al ámbito general de la semiótica, para conocer un signo dado (ámbito de lo *actual*) deberíamos recorrer entonces los múltiples contextos de interpretación susceptibles de interpretar el signo (ámbito de lo *posible*) y, dentro de cada contexto, estudiar las consecuencias prácticas imperativas asociadas a cada una de esas interpretaciones (ámbito de lo *necesario*). Dentro de ese panorama general, el *tránsito incesante y concreto* entre lo posible, lo actual y lo necesario resulta ser una de las *especificidades* del pensamiento matemático, como lo subrayaremos repetidas veces en lo que sigue de este trabajo. En ese tránsito, las relaciones entre los contextos posibles (situadas en un espacio *global*) y las relaciones entre los fragmentos de contrastación necesaria (situadas en un espacio *local*) adquieren una relevancia primordial, algo que por supuesto

40 Charles S. Peirce, "How to Make Our Ideas Clear" (1878), en: C. S. Peirce, *Collected Papers*, Harvard: Harvard University Press, 1931-1958 (reedición: Bristol: Thoemmes Press, 1998). Cita: CP 5.402.

41 Charles S. Peirce, "Harvard Lectures on Pragmatism" (1903). Cita: CP 5.18.

42 Charles S. Peirce, "Issues of Pragmaticism" (1903). Cita: CP 5.438.

se encuentra en plena sintonía con la importancia conceptual de la lógica de las relaciones, sistematizada por el propio Peirce. De esta manera, la máxima pragmaticista señala que el conocimiento, visto como proceso lógico-semiótico, es preeminentemente contextual (versus absoluto), relacional (versus sustancial), modal (versus determinado), sintético (versus analítico).

La máxima filtra el mundo a través de tres complejas redes que permiten diferenciar lo uno en lo múltiple e, inversamente, integrar lo múltiple en lo uno: la red *modal* ya señalada, una red *representacional* y una red *relacional*. En efecto, más allá de abrirse al mundo de los posibles, los signos del mundo deben poder ante todo representarse dentro de los lenguajes (lingüísticos o diagramáticos) que manejan las comunidades de intérpretes. Los problemas de la representación (fidelidad, distancia, reflexividad, parcialidad, etc.) se encuentran ligados entonces inmediatamente con la *diferenciación de lo uno en lo múltiple*: la lectura de un mismo hecho, o de un mismo concepto, que se dispersa mediante múltiples lenguajes, mediante múltiples "modos generales" de manejo de la información, y mediante múltiples reglas de organización y de estratificación de la información.

Una de las fortalezas del pragmatismo peirceano, y en particular de la máxima pragmaticista plenamente modalizada, consiste en permitir *reintegrar de nuevo lo múltiple en lo uno*, gracias a la tercera red en juego: la red relacional. De hecho, después de descomponer un signo en subfragmentos dentro de los diversos contextos posibles de interpretación, las correlaciones entre los fragmentos dan lugar a nuevas formas de conocimiento, que estaban sepultas en la primera percepción del signo. La dimensión pragmática enfatiza en la *coligazón* de algunas posibles correlaciones, descubriendo analogías y transvases entre estratos estructurales que no habían sido descubiertos antes de efectuarse la diferenciación. De esta manera, aunque la máxima detecta la importancia fundamental de las interpretaciones locales, esta insta también a la reconstrucción de aproximaciones globales por medio de adecuados *pegamientos* de lo local. Veremos posteriormente cómo las herramientas de la teoría matemática de categorías dotan de una gran precisión técnica a estas primeras ideas vagas y generales. La máxima pragmaticista emergerá entonces como una suerte de abstracto *cálculo diferencial e integral*, que podrá ser aplicado a la teoría general de las representaciones, es decir, a la lógica y a la semiótica en el sentido más genérico de estas ciencias preconizado por Peirce.

A continuación presentamos una esquematización diagramática de la máxima pragmaticista, donde condensamos sintéticamente los comentarios hasta ahora expuestos. Este diagrama (*figura 4*) será imprescindible para captar *en forma natural* la estructuración de la máxima desde la perspectiva que nos ofrece la teoría matemática de categorías. Leyendo de izquierda a derecha, el diagrama muestra un signo actual, que es múltiplemente representado (es decir, subdeterminado) en contextos posibles de interpretación, y cuyas acciones-reacciones necesarias en cada contexto dan lugar a comprensiones parciales del signo. Ese primer proceso de diferenciación se evoca mediante los términos "diferenciales pragmáticos" y "modulaciones"; este último término nos recuerda que un *mismo* motivo puede ser extensamente alterado a lo largo del desarrollo de una composición musical. El proceso de reintegración propio de la pragmática peirceana se evoca mediante los términos de "integral pragmática", "correlaciones, pegamientos, transferencias", que nos recuerdan el deseo de volver a unir lo fragmentado. La dimensión pragmática busca la *coligazón* de todos los posibles contextos y la integración de todas las modulaciones diferenciales obtenidas en cada contexto, un esfuerzo sintético que se ha constituido también como labor primordial de la teoría de modelos y de la teoría de categorías en la lógica contemporánea.

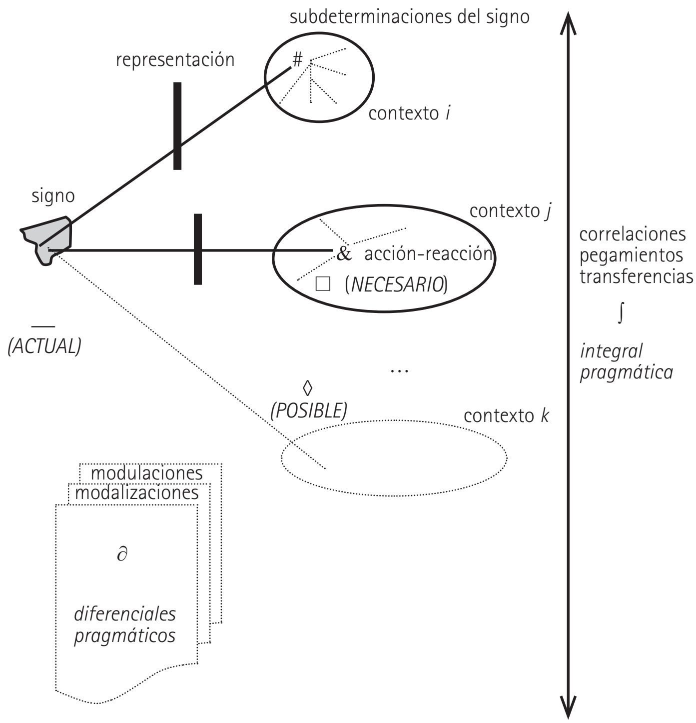

Figura 4. *Esquema de la máxima pragmaticista de Peirce.*

La máxima pragmaticista sirve entonces de sofisticado "haz de filtros" para decantar la realidad. El papel crucial del "haz" asegura una amplia multiplicidad de perspectivas y, por tanto, el que no se filtre de una única manera la información, consiguiendo así *de entrada* una cierta *plausibilidad* de que el conocimiento será lo suficientemente rico y multivaluado. El papel de la máxima pragmaticista peirceana dentro de la filosofía de las matemáticas contemporáneas puede llegar a ser extraordinariamente útil. El primer punto resaltado por la máxima consiste en *no privilegiar* ningún punto de vista o ningún fragmento de lenguaje por encima de los demás y, por tanto, en *abrir* la posibilidad de considerar, en palabras de Susan Haack, "verdades alternativas sin tener que reducirlas todas a *un* mismo vocabulario privilegiado o a *una* teoría privilegiada". Pendularmente, la segunda fortaleza crucial de la máxima consiste en poder *comparar* muy diversos *niveles* dentro de esa multiplicidad de perspectivas, lenguajes y contextos de verdad que se ha logrado abrir; de hecho, el no querer asumir taxativamente ningún "fundamento" privilegiado, no nos tiene por qué llevar a un relativismo extremo, sin jerarquías de valor. Así, por ejemplo, el no reducirse, en cuestiones de fundamentos, a discusiones referentes a la supuesta base "absoluta" *ZF* o a la fuerza dominante de la lógica clásica de primer orden, sino el abrirse a discusiones dentro de otros *fragmentos* deductivos de *ZF* ("matemáticas en reverso"), *fragmentos* semánticos (teoría abstracta de modelos) o *fragmentos* estructurales (teoría de categorías), es una estrategia que amplía los contextos de contrastación –y, por lo tanto, la riqueza *matemática* en juego– sin abocarse por ello a un desorden epistemológico. Nuestra contención, en realidad, es precisamente la contraria: *gracias* a poder escapar de unos supuestos fundamentos "últimos", y *gracias* a situarnos dentro de un *tejido relativo de contrastaciones, obstrucciones, residuos y pegamientos*, es cómo surge, evolutiva y asintóticamente, un verdadero *orden* epistemológico para la matemática.

La máxima pragmaticista peirceana puede verse como una forma sofisticada de vaivén entre análisis/diferenciación y síntesis/integración. El mundo contemporáneo requiere nuevas herramientas conceptuales de "encuadernación" o "pegamiento" de lo diferencial –que respondan con nuevos argumentos a la dialéctica "primordial" diferenciación/integración[43]– y, en gran medida, la máxima pragmaticista peirceana provee una de esas herramientas de pegamiento. A nuestro entender, si existe un concepto matemático que puede servir de umbral entre las matemáticas modernas y contemporáneas, es un *haz matemático* (*faisceau, sheaf*), concepto matemático indispensable para reintegrar adecuadas compatibilidades locales en un pegamiento global[44]. Correlativamente, dentro del ámbito de

43 Una buena presentación de la polaridad análisis/síntesis y de su *subsunción* dentro de la polaridad "mayor" diferenciación/integración se encuentra en el artículo "Analisi/sintesi" de Gerald Holton para la *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1977, vol. I, pp. 491-522.

44 Estudiaremos en detalle las múltiples facetas de los haces en topología, geometría algebraica y lógica en la segunda parte de este trabajo. La movible plasticidad de los haces no sólo permite pasar de lo local a lo global, sino, de manera natural, permite múltiples ósmosis entre subcampos muy diversos de la matemática. En cierta forma, desde su misma génesis, los haces adquieren una incisiva *riqueza reflexiva* que los

la epistemología, creemos que la máxima pragmaticista peirceana puede servir de notable *haz metodológico* para comparar lo diverso y, luego, intentar entrelazarlo. La red de redes peirceana se abre en efecto a ámbitos *plenos* de lo modal, y se ocupa sistemáticamente en contrastar hechos dados (dentro del mundo fenoménico) y comportamientos necesarios (dentro de sistemas contextuales bien definidos), para luego intentar reintegrarlos dentro de un espectro extendido de signos posibles.

La diferenciación y la reintegración alcanzan un alto grado de precisión metodológica en la teoría matemática de categorías. Como contraparte de la analítica conjuntista propugnada por los herederos de Cantor[45], la teoría de categorías deja de desmenuzar los objetos por dentro y de analizarlos mediante sus elementos, y pasa a elaborar aproximaciones sintéticas en las cuales los objetos son estudiados por su comportamiento exterior, en correlación con su medio ambiente. Entendidos como "cajas negras", los objetos categóricos *dejan de ser* tratados analíticamente, y mediante un importante esfuerzo acumulativo de caracterizaciones sintéticas se observa el movimiento de los objetos dentro de contextos variables. La teoría de categorías detecta, para ciertas clases de estructuras (lógicas, algebraicas, ordenadas, topológicas, diferenciables, etc.), algunos invariantes sintéticos generales dentro de esas clases, y los define mediante ciertas "propiedades universales". Esas propiedades pueden valer, en primera instancia, para universos dados de clases de estructuras (= categorías "concretas"), pero pueden a menudo extenderse a ámbitos más generales donde se axiomatizan las propiedades genéricas minimales de esas clases (= categorías "abstractas"). Múltiples vaivenes de información (= "funtores") se instauran entonces entre categorías abstractas y categorías concretas. Un incesante proceso de *diferenciación* diversifica las construcciones universales que se dan en las categorías abstractas y las "encarna" en contrastantes formas dentro de múltiples categorías concretas. Inversamente –diríamos pendularmente– un incesante proceso de *integración* busca constructos y raíces comunes, en el nivel de las categorías abstractas, para una gran variedad de construcciones especiales que van dándose en las categorías concretas.

De esta manera, una *cuádruple* estrategia sintética va adquiriendo forma dentro de la teoría de categorías. Ante todo, internamente, dentro de cada categoría concreta, ciertas construcciones especiales intentan ser caracterizadas por sus propiedades medioambientales en la clase dada. Luego, externamente, en el ámbito general de las categorías abstractas, se buscan ciertas construcciones universales que puedan dar cuenta de las caracterizaciones conseguidas en las categorías concretas. En la tercera

torna asombrosamente maleables.

45 El mismo Cantor se situaba más bien en una suerte de *organicismo* general (con considerables y sorprendentes esperanzas de que sus *alephs* sirvieran para entender el mundo de lo vivo), donde se entroncan consideraciones analíticas y sintéticas. Para el organicismo de Cantor, véase José Ferreirós, "Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura", http://nti.educa.rcanaria.es/fundoro/SR2002_Capitulos/Parte_III/III_1_SR2002_web.pdf

etapa, en un notable *vaivén* entre categorías concretas y abstractas, se van definiendo adecuados funtores de diferenciación y reintegración. Finalmente, los funtores mismos pasan a ser objeto de estudio desde un punto de vista sintético, y se estudian sistemáticamente sus ósmosis y obstrucciones (= "transformaciones naturales"). La teoría de categorías, como veremos en los *capítulos 4-7*, ha adquirido un considerable valor matemático *per se*, pero por el momento solo nos interesa recalcar su interés metodológico para una filosofía de las matemáticas *abierta* a incesantes procesos pendulares de diferenciación y reintegración.

De hecho, *en caso de que la filosofía de las matemáticas pudiera valerse de las enseñanzas sintéticas sobre diferenciación y reintegración codificadas tanto en la máxima pragmaticista peirceana como en los procesos funtoriales de la teoría de categorías*, muchos de los problemas fundamentales de la filosofía de las matemáticas podrían adquirir nuevos visos y giros que –creemos– enriquecerían el diálogo filosófico. El objetivo de la tercera parte de este ensayo consistirá precisamente en la discusión de esos problemas, a la vista de los aportes de las matemáticas contemporáneas, y a la vista del entronque sintético de la máxima pragmaticista peirceana y de los lineamientos metodológicos de la teoría de categorías. Sin embargo, desde ya, al plantear las *mismas* problemáticas desde las perspectivas complementarias del análisis y de la síntesis, pueden señalarse algunas *inversiones* fundamentales (ver *figura 5*) en los *requerimientos* que una perspectiva analítica o una perspectiva sintética llevan a forzar.

problemática	*visión analítica (filosofía lenguaje + fundamentos conjuntistas)*	*visión sintética (maxima pragmaticista + contextos teoría categorías)*
ontología realista: los objetos matemáticos existen en un mundo real	requiere postular la existencia real de universos de conjuntos y de una intuición fiel que nos otorgue un acceso a ellos	requiere postular la existencia de un cubrimiento de lo real mediante jerarquías progresivas de contextos estructurales que se aproximen asintóticamente
ontología idealista: los objetos matemáticos son subterfugios lingüísticos	requiere postular una disociación de los constructos matemáticos y de sus entornos físicos	requiere postular una disociación entre clases de categorías lingüísticas y clases de categorías de la física matemática
epistemología realista: los valores de verdad reflejan formas de conocimiento objetivo	requiere postular la existencia de una semántica conjuntista como adecuada transposición de correlaciones semánticas en el mundo real	requiere postular la existencia de adjunciones semánticas categóricas y de invarianzas de esqueletos a lo largo de vaivenes funtoriales
epistemología idealista: los valores de verdad son formas subjetivas de control	requiere postular una variabilidad o modalización de los conjuntos, y asumir la existencia de transiciones estables entre mundos "composibles"	requiere postular la imposibilidad de categorías iniciales "arquetípicas" que puedan clasificar genéricamente las verdades de sus categorías derivadas
metafísica realista: "to ti en einai" ("lo esencial de la esencia") existe matemáticamente	requiere postular la existencia de un modelo "monstruo" y de esquemas naturales de reflexión donde quepan todos los universos de conjuntos	requiere postular la existencia de múltiples topos clasificadores y de ulteriores límites inversos donde puedan "pegarse" los clasificadores
metafísica idealista: "to ti en einai" no existe matemáticamente	requiere postular la necesidad de torres de universos conjuntistas sólo controlables mediante consistencias relativas	requiere postular la necesidad de iteraciones funtoriales *ad infinitum* irreducibles a proyecciones desde un supuesto clasificador "final"

Figura 5. *Perspectivas complementarias en el planteamiento "puro" de problemáticas en filosofía de la matemática*

Como veremos y discutiremos en la tercera parte de este trabajo, algunos de los requerimientos anteriores parecen demasiado fuertes y situarse *en contravía* de diversos avances conseguidos en las matemáticas contemporáneas. Por ejemplo, desde una aproximación sintética a las matemáticas –más apropiada que una aproximación analítica si se desea valorar la práctica matemática–, una ontología idealista que disocie categorías lingüísticas (a la Lambek) y categorías de la física matemática (a la Lawvere) parecería *inviable*, ya que se situaría en inmediata contradicción con los avances en *n*-categorías (a la Baez) que permiten dar cuenta *simultáneamente* de complejos torsores lingüísticos y físicos. Otro ejemplo, enfocado de nuevo desde una perspectiva sintética, parecería mostrar que una epistemología idealista es igualmente *inviable*, ya que entraría en conflicto con la posibilidad (ya realizada) de construir topos clasificadores y alegorías iniciales (a la Freyd). De esta manera, es fácil intuir desde ya cómo nuestra doble estrategia alternativa –*aprovechar enfoques metodológicos* *"sintéticos" y acercarnos a las matemáticas contemporáneas*– puede otorgar considerables frutos filosóficos. Confiamos poder mostrar más adelante que el dirigirse así hacia *más matemáticas* (y no necesariamente hacia "más filosofía") representa una estrategia razonable para llegar a abrir atractivas e insospechadas compuertas en el diálogo filosófico.

La máxima pragmaticista peirceana y los lineamientos metodológicos de la teoría de categorías ayudan a proveer una visión más *plena y fiel* de *la práctica matemática* que la que puede proveer una visión analítica. Las razones son diversas y se relacionan con el sentido natural que adquieren los términos "pleno" y "fiel", si extendemos su alcance a partir del que se les ha dado en el contexto técnico de los funtores, en la teoría de categorías. Observando que toda construcción que se realice en un entorno dado de la matemática (topológico, algebraico, geométrico, diferencial, lógico, etc.) es necesariamente local dentro de un contexto adecuado[46], llamaremos *contexto de adecuación minimal* a un contexto en el que pueda realizarse localmente la construcción, pero que no invoque redundantes axiomas globales adicionales. Diremos entonces que una visión de un determinado entorno de la matemática es *plena* cuando permite asociar, a toda construcción matemática del entorno, un contexto de adecuación minimal para esa construcción, y diremos que una visión de un entorno de la matemática es *fiel* cuando permite reconstruir toda construcción matemática del entorno dentro de un contexto de adecuación minimal. La *plenitud* de la visión asegura que la riqueza local de las teorías no se diluya dentro un magma global; la *fidelidad* de la visión asegura que esa riqueza local sea realmente suficiente para su pleno desarrollo. Por ejemplo, la visión analítica usual de las matemáticas –basada en la teoría de conjuntos *ZF* y en la lógica clásica de primer orden subyacente– no resulta ser *ni plena ni fiel* en el sentido anterior. Por el amplio alcance global mismo de los axiomas de *ZF*, la visión no es plena ya que se pierden obligatoriamente los contextos de adecuación minimales (una situación de *pérdida de información*, es decir, de pérdida de plenitud, a la que las *reverse mathematics* proponen un paliativo), y tampoco es fiel puesto que la mayoría de las construcciones se realizan invocando sin control toda la fuerza de los axiomas.

La práctica matemática se encuentra en cambio mucho más cercana de una visión que se encuentre realmente atenta a ir detectando *tanto transferencias, como obstrucciones*, entre contextos de adecuación minimales. Las nociones de obstrucción y de residuo son aquí fundamentales, ya que tanto la inventividad matemática, como su posterior regulación demostrativa, van incesantemente registrando obstrucciones y

46 El contexto de adecuación puede ser muy grande: si la construcción matemática es, por ejemplo, el universo acumulativo de conjuntos, un contexto que torne local a la jerarquía acumulativa requerirá alzarse hasta algún cardinal inaccesible. Sin embargo, la mayoría de las construcciones matemáticas "reales" (en el sentido de Hardy, retomado por Corfield) viven en contextos matemáticos mucho más controlados, tanto en requerimientos cardinales como estructurales.

reconstruyendo enteros mapas de la matemática a partir de ciertos residuos ligados a esas obstrucciones[47]. Ahora bien, las obstrucciones y los residuos solo adquieren sentido localmente, con respecto a ciertos contextos de adecuación, algo que se pierde a menudo desde la visión analítica usual y que, en cambio, una visión sintética ayuda a realzar. Como lo vimos en el "mapa" de la máxima pragmaticista peirceana (*figura 4*), se trata también de una situación particularmente proclive a ser detectada por la máxima, atenta tanto a diferenciales locales y singularidades contextuales, como a una posterior reintegración modal de los quiebres locales.

Una *filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* deberá estar atenta así a captar al menos las siguientes características *minimales* que surgen de forma natural en una suerte de *genérica* "metodología diferencial e integral" donde se entrelazan matemáticas, filosofía e historia:

(1) delimitación contextual y relacional del ámbito de las matemáticas contemporáneas con respecto a los ámbitos de las matemáticas modernas y clásicas;
(2) diferenciación de enlaces plurales entre matemáticas y filosofías, y, luego, reintegración de esas distinciones dentro de perspectivas unitarias parciales;
(3) presentación de una visión plena y fiel de la práctica matemática, particularmente sensible a un vaivén pendular entre transferencias y obstrucciones, entre suavizaciones y residuos;
(4) diagramación de las multivalencias, ramificaciones y torsiones entre espectros de teoremas matemáticos y espectros de interpretaciones filosóficas.

En lo que sigue, nos adentraremos en precisos estudios de caso dentro de las matemáticas contemporáneas, con los que podremos ir resaltando los puntos anteriores, antes de volver, en la tercera parte del trabajo, a otras consideraciones "esqueléticas"[48] sobre la filosofía de las matemáticas.

---

47 La función $\zeta(s)$ de Riemann provee aquí un caso ejemplar. Desde su definición misma (por extensión analítica, rodeando sus singularidades en la recta $Re(s)=1$), hasta su aún misteriosa aplicabilidad en la teoría de números (bloqueos alrededor de la demostración de que los ceros de la función ζ yacen en la recta $Re(s)=1/2$), la función ζ provee un ejemplo notable en el que la matemática *extiende* sus dominios de invención y de prueba *gracias a las obstrucciones* –tanto definicionales como estructurales– en las que se ven sumidas ciertas construcciones mixtas de gran calado (aquí, la función ζ como "gozne" entre la teoría de números, la variable compleja y la geometría algebraica).

48 Puede observarse en nuestra estrategia un símil con ciertas aproximaciones al uso en teoría de categorías, donde, primero, una categoría se delimita de otras aledañas, segundo, se estudian en detalle diversas construcciones concretas de la categoría, y, tercero, se caracterizan finalmente su esqueleto y sus construcciones libres. Las tres partes de nuestro trabajo corresponden –en una no muy lejana analogía– al estudio de la "categoría" de las matemáticas contemporáneas y de sus diversas adjunciones con respecto a diversas "categorías" de interpretaciones filosóficas.

Segunda Parte

Estudios de caso

Capítulo 4

Grothendieck. Formas de la alta creatividad matemática

En esta segunda parte, presentaremos breves estudios de caso en el panorama de las matemáticas contemporáneas (1950-2000). Nuestra estrategia consistirá en proveer información matemática –básicamente conceptual y, en menor medida, técnica– no considerada usualmente dentro del ámbito de la filosofía, información que será desbrozada luego y discutida filosóficamente en la tercera parte del trabajo. No obstante, aunque el objetivo primordial de esta segunda parte consiste en expandir la cultura matemática *concreta* del lector, iremos también anunciando y discutiendo sucintamente algunas líneas *genéricas* de tensión, metodológicas y creativas, que una plena comprensión filosófica de las matemáticas tendrá que abordar. La matemática contemporánea ha dado lugar a nuevas formas de tránsito en el conocimiento, que originan a su vez nuevas problemáticas filosóficas y nuevas resoluciones parciales de las mismas.

4.1 Vida y obra de Grothendieck: grandes lineamientos

Alexander Grothendieck nace en Berlín (1928) y se educa allí en su media infancia (1933-39) bajo el cuidado de un ministro luterano (Heydorn), mientras sus padres se dedican a una agitada actividad política (padre: Alexander Shapiro, anarquista ruso, radical en Alemania y Francia en los años veinte y treinta, brigadista en la Guerra Civil española, asesinado en Auschwitz; madre: Hanka Grothendieck, periodista en revistas de izquierda, acompañante de Shapiro por Francia y España; después de la derrota de la República española, se reúne con su hijo)[49]. Entre 1940 y 1942, Alexander es internado con su madre en el campo de concentración de Rieucros, de donde puede salir luego para seguir, en Chambon, bajo el

49 Un buen recorrido sobre la vida de Grothendieck se encuentra en Allyn Jackson, "*Comme Appelé du Néant* – As If Summoned from the Void: The Life of Alexander Grothendieck", *Notices of the AMS* 51 (numbers 4, 10) (2004): 1037-1056, 1196-1212. Una próxima biografía de Grothendieck, de Colin McLarty, debe empezar a cubrir un vacío inexcusable.

cuidado de otro padre protestante (Trocmé) hasta el final de la guerra. De nuevo reunido con su madre, Alexander realiza su Carrera de matemáticas en la Universidad de Montpellier, donde alguno de sus maestros subraya su "extraordinaria capacidad, desequilibrada por el sufrimiento". Es la época en la que el brillante joven, descontento con el cálculo que le enseñan en la Universidad, propone una completa teoría de la integración que, sin saberlo, resulta ser equivalente a la teoría de Lebesgue.

Desde entonces, Grothendieck *hace* incesantemente matemáticas, más que estudiarlas[50]. Se inicia en las altas matemáticas participando (1948) en el Seminario Cartan de la *École normale supérieure*, realiza su tesis doctoral[51] bajo Dieudonné y Schwartz en Nancy entre 1949 y 1953, y visita luego América (São Paulo, 1953-54; Kansas, 1955) convirtiéndose en un reputado especialista en espacios vectoriales topológicos[52]. Inventa luego la K-teoría en 1957 y propone una generalización profunda del teorema de Riemann-Roch, con consecuencias notables en la matemática de fines de los años cincuenta y comienzos de los sesenta (nos extenderemos sobre la K-teoría y el teorema Riemann-Roch-Grothendieck en el *capítulo 6*, al acercarnos a la obra de Atiyah). También en 1957 publica su famoso artículo-tratado *Sobre algunos puntos del álgebra homológica*[53] (que comentaremos en la sección 4.3), en el que presenta su programa de renovación de la geometría algebraica.

En los años sesenta, el IHES, con Grothendieck a la cabeza, se convierte en el primer centro mundial de investigación en matemáticas. Resulta ser la década de creación de las ideas motrices centrales de Grothendieck –(i) esquemas, (ii) topos, (iii) motivos–, con la producción de las dos grandes series de escritos que renovarán completamente la matemática de la época: los *Elementos de Geometría Algebraica* (EGA)[54] y el *Seminario de*

---

50 Es famosa la anécdota de un visitante que habría estado en el IHES (creado para Grothendieck en los años sesenta) y que se habría extrañado de la pobreza de la biblioteca en semejante meca de la matemática. Grothendieck le habría respondido: "aquí no leemos matemáticas, aquí las hacemos..."

51 Según Dieudonné –conocedor del análisis, si lo ha habido–, la tesis de Grothendieck solo podría ser comparable, en el ámbito de los espacios vectoriales topológicos, con los trabajos de Banach.

52 Los *espacios nucleares*, introducidos por Grothendieck en su tesis doctoral, son espacios vectoriales topológicos definidos por familias de seminormas con una propiedad telescópica (cada bola unitaria de una seminorma se sumerge en las bolas de las demás seminormas mediante adecuadas multiplicaciones). Se trata de espacios que capturan de forma natural familias de funciones importantes del análisis complejo y diferencial (funciones holomorfas enteras, funciones lisas sobre variedades diferenciales compactas), y que calcan, en el infinito, algunas buenas propiedades de los espacios finito-dimensionales. Los tratamientos de esas propiedades mediante productos tensoriales empiezan a concretar algunas de las grandes estrategias posteriores de Grothendieck: estudiar las propiedades de un objeto insertándolo en una clase (*categoría*) de objetos similares, construir *transmisores* de información para las propiedades del objeto, *comparar* con comportamientos similares en otras categorías, y reutilizar toda la información *pendular* acumulada para poder *capturar* con nuevos ojos el objeto inicial.

53 Alexander Grothendieck, "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohoku Math. Journal* 9 (1957): 119-221. El artículo se conoce usualmente como "Tohoku" por el periódico donde se publicó.

54 Alexander Grothendieck (redactado en colaboración con Jean Dieudonné), *Éléments de*

Geometría Algebraica (SGA)[55]. Grothendieck recibe la medalla Fields en 1966, y su espectro de influencia dentro del panorama de los medallistas sucesores es amplísimo (*figura 6*). Aunque se retira sorpresivamente del mundo matemático en 1970 (¡a los 42 años!), después de haber dejado una obra que cohortes enteras de matemáticos difícilmente generarían en un siglo, continúa con la producción de grandes manuscritos matemáticos[56] y con la escritura de inacabables reflexiones[57] (auto)críticas sobre el mundo (matemático y teológico). En total, Grothendieck deja una obra gigantesca, tanto en profundidad (la matemática del periodo 1970-2000, particularmente el panorama Fields, puede verse en gran medida como una suerte de "comentario" a Grothendieck), como en cantidad (cerca de diez mil páginas manuscritas). Se trata de una verdadera mina para el comentador y para el filósofo, que apenas ha empezado a aprovecharse[58].

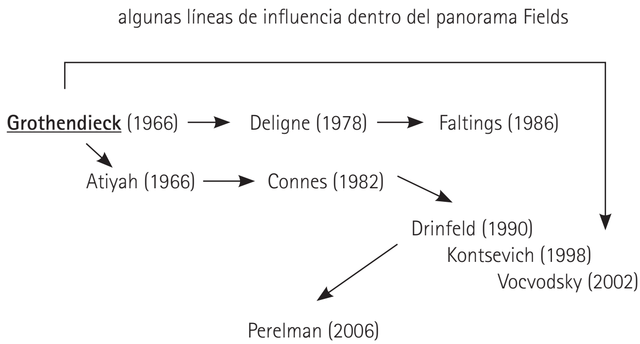

Figura 6. *La herencia de Grothendieck dentro del panorama de medallistas Fields*

Después de los notables años cincuenta (espacios nucleares, K-teoría, álgebra homológica), la primera gran idea-motriz de Grothendieck en el periodo áureo del IHES sirve de impulso a una profunda renovación de la geometría algebraica. Situándose dentro de lo que luego llamaría Thom la "aporía fundadora de las matemáticas"[59] –es decir, dentro de la

Géométrie Algébrique, IV volúmenes (8 partes), París: IHES, 1960-1967.

55 Alexander Grothendieck et al., *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, VII volúmenes (12 partes), Berlín: Springer, 1970-1973 (fascículos originales multicopiados, 1960-1969).

56 "La larga marcha a través de la Teoría de Galois" (*La longue marche à travers la Théorie de Galois* 1981), 1800 pp. "Esbozo de un programa" (*Esquisse d'un programme* 1983, suerte de testamento matemático), 50 pp. "Los derivadores" (*Les dérivateurs* 1990), 2000 pp.

57 "Cosechas y siembras" (*Récoltes et Semailles* 1985-86), 1000 pp. "La llave de los sueños" (*La Clef des Songes*), 315 pp.

58 Ciertas partes digitalizadas de la obra de Grothendieck y algunos estudios sobre la obra se encuentran disponibles en la página www.grothendieckcircle.org, promovida por Leila Schneps y Pierre Lochak.

59 René Thom, "L'aporia fondatrice delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1982, pp. 1133-1146.

irresoluble dialéctica contradictoria discreto/continuo–, Grothendieck inventa sus *esquemas* como una herramienta muy potente para intentar resolver las Conjeturas de Weil (1949). Entronque preciso entre lo discreto y lo continuo, las conjeturas[60] intentan poder medir el número de puntos en ciertas variedades algebraicas sobre campos finitos, mediante ciertas funciones generadoras del tipo de las funciones zeta, provenientes de la intuición continua complejo-topológica de Riemann. Dwork (1960) demuestra la racionalidad de las funciones zeta, Grothendieck (1966) la ecuación funcional que las gobierna y Deligne (1974), el mayor alumno de Grothendieck, la adecuada distribución de sus ceros (lo que da lugar al control combinatorio de los puntos en la variedad). El resultado de Deligne es un verdadero *tour de force* técnico que le valdrá la medalla Fields.

La matemática moderna, en la primera mitad del siglo XX, culmina con la sorprendente prospección de Weil; impulsado por una muy fina intuición concreta y por una inusual capacidad para develar analogías en el cruce entre variedades algebraicas y topología, Weil logra *enunciar* muy precisamente sus conjeturas. La matemática contemporánea, en la segunda mitad del siglo XX, emerge en la obra de Grothendieck, y crea todo el aparataje de geometría algebraica que permite en cambio *resolver* esas conjeturas. Mientras que las topologías de Zariski sirven de mediaciones en el cruce [variedades algebraicas / topologías], y permiten enunciar las conjeturas, las cohomologías ("étale", *l*-ádica) de Grothendieck y de su escuela sirven de mediaciones en el cruce [esquemas / topos], permitiendo ahora resolverlas. Al extender las variedades algebraicas al ámbito de los esquemas, la riqueza de la *invención genérica* grothendickiana no procede gratuitamente. La generalización no se realiza nunca sin adecuadas particularizaciones en mente, y se trata en realidad de un complejo proceso de *ascenso y descenso* que, como veremos más en detalle en la sección 4.2, resulta estar siempre gobernado por consecuencias concretas del más alto valor matemático.

De hecho, con la creación de sus esquemas, Grothendieck entronca dos de las corrientes mayores de la matemática moderna: la *visión de Riemann*, que permite entender una curva *X* mediante el *anillo M(X)* de las funciones meromorfas sobre la curva, y *la visión de Galois-Dedekind*, que permite entender una variedad algebraica *V* mediante el espectro *Spec(V)* de sus ideales maximales. En efecto, Grothendieck generaliza la situación para poder *englobar* ambas visiones, y propone entender un anillo (conmutativo, unitario) *arbitrario* mediante una jerarquía de tres objetos de gran riqueza matemática: el espectro de sus ideales primos, la topología de Zariski sobre el espectro de primos y los haces naturales sobre el espectro topologizado. Esos haces, con algunas condiciones adicionales sobre las fibras, resultan ser los ***esquemas*** ("schémas") de Grothendieck, quien consigue entonces no solo unir algunas de las intuiciones más profundas de la matemática

60 A. Weil, "Numbers of solutions of equations in finite fields", *Bul.Am.Math.Soc.* 55 (1949): 497-508.

moderna (Galois, Riemann), sino *ampliar la concepción misma del espacio*, en el cual no importan ya los puntos, sino las posiciones y el movimiento (secciones en el haz).

De la obra de Grothendieck –desde sus grandes lineamientos generales, hasta sus concreciones técnicas más particulares (como veremos en la sección 4.3)– se desprende un paradigma fundamental, que quisiéramos denominar la *práctica de una matemática relativa*. Las estrategias de Grothendieck pueden entenderse, de hecho, en un sentido conceptual, como cercanas a las modulaciones relativas introducidas por Einstein en la física. Tanto Einstein como Grothendieck manejan, de manera técnica, el marco del observador y las dinámicas parciales del agente en el conocimiento. En particular, en el hacer de Grothendieck, puede observarse, primero, una introducción de una red de incesantes *traslados, traslaciones, traducciones* de conceptos y objetos entre regiones aparentemente distantes de la matemática, y, segundo, una búsqueda igualmente incesante de *invariantes, proto-conceptos y proto-objetos* detrás de esa red de movimientos. Los haces y los esquemas permiten encarnar, en sus definiciones técnicas, tanto el flujo, como el reposo. Más allá de los haces como objetos singulares, la "proto-geometría" que subyace a ciertas *clases* de haces da lugar entonces a los ***topos*** de Grothendieck.

Los topos de Grothendieck (1962) son categorías de haces provenientes de ciertas topologías "naturales" abstractas[61]. Suerte de *universos paralelos* para el desarrollo de las matemáticas, los topos son entornos categóricos suficientemente amplios para poder desarrollar toda una tecnología sofisticada de lo relativo. Generalizando la acción de ciertos grupoides sobre las fibras de un haz, Grothendieck pretende *mover los topos* (ya no solo entornos conjuntistas, sino topológicos, algebraicos, diferenciales, combinatorios, etc.) y estudiar en forma genérica las acciones de variados funtores sobre clases muy amplias de topos. Los resultados no se dejan esperar, y *en el ámbito geométrico genérico de los topos es donde ciertas obstrucciones cohomológicas desaparecen*: donde Grothendieck y su escuela pueden desarrollar la cohomología "étale" que le permite a Deligne resolver las conjeturas de Weil. En los topos, los objetos dejan de estar "fijos", y se "desenvuelven a lo largo del tiempo": se trata de *conjuntos variables* cuyos progresivos ajustes paramétricos permiten resolver una multitud de obstrucciones que en una matemática "puntual", clásica o estática,

61 En categorías con algunas buenas propiedades de composicionalidad y cubrimiento, una topología abstracta (*topología de Grothendieck*) puede definirse mediante (sub) colecciones de morfismos que "empaten" bien las unas con las otras. Las categorías de *prehaces* (categorías de funtores a valores en la categoría de conjuntos) verifican esas buenas propiedades de composicionalidad y cubrimiento, y pueden definirse allí topologías abstractas. Los *topos de Grothendieck* proceden de categorías de prehaces que se "sitúen" alrededor de una topología abstracta dada (esos entornos categóricos se llaman también entonces *sitios*). Una simplificación de los topos de Grothendieck son los *topos elementales* de Lawvere (1970), donde las topologías abstractas (mediante el lema de Yoneda) pueden ser fácilmente descritas gracias a *un solo* endomorfismo del clasificador de subobjetos, que calque las propiedades algebraicas de un operador de clausura.

parecían irresolubles. Puede intuirse desde ya el enorme impacto filosófico que puede tener así una tal *matemática relativa*, una matemática atenta al *desliz* pero con la capacidad de detectar invariantes detrás del flujo, una matemática que va en contravía de supuestos fundamentos últimos, de verdades absolutas, de estabilidades inamovibles, pero que es capaz de establecer en cambio *redes asintóticas* de verdad.

En Grothendieck, los objetos tienden a estar situados sobre ciertas "bases" (el haz sobre su espacio topológico subyacente, el esquema sobre su espectro), y muchos problemas importantes surgen cuando se realizan *cambios de base*. La matemática "relativa" adquiere entonces una gran incisividad técnica, al preguntarse qué propiedades se trasladan al realizar los cambios de base (*teoría del descenso*: (i) búsqueda de condiciones para poder realizar traslados; y su contraparte, (ii) detección de condiciones de obstrucción en los cambios de base). En esos procesos de traslación/traducción surgen de manera natural condiciones de coherencia y de pegamiento abstractas, que solo resultan ser definibles con comodidad en los topos de Grothendieck. En particular, el "sitio" de Zariski que había permitido enunciar las conjeturas de Weil es reemplazado por el "sitio étale"[62] de Grothendieck, donde este construye –siguiendo un procedimiento general que revisaremos en el *Tohoku*, según el cual ciertas categorías de haces dan lugar a grupos naturales de cohomología– la cohomología "étale" que Deligne necesitaría posteriormente para la resolución de las conjeturas[63].

En realidad, la dinámica conceptual de los topos supera con mucho los primeros objetivos técnicos de la teoría, por más brillantes que estos fueran. De hecho, detrás de los topos de Grothendieck emergen los *topos elementales* de Lawvere, donde se observa que las consideraciones de teoría de números, álgebra, topología y geometría adelantadas por Grothendieck poseen también unas sorprendentes contrapartes *lógicas*[64]. Como veremos en los *capítulos 5 y 7* al acercarnos a Lawvere y a Freyd, las categorías y alegorías que se sitúan entre categorías cartesianas y topos codifican toda una legión de lógicas intermedias, cuya *red relativa* refleja buena parte de los movimientos de las matemáticas superiores que se basan sobre ellas. Los *cambios de base en las lógicas subyacentes* dan lugar

---

62 "Étale": liso, sin protuberancias (el término proviene de un poema de Victor Hugo acerca de un mar "étale"). El uso metafórico de "étale" por Grothendieck condensa la idea de lo *no ramificado*, donde Grothendieck combina –una vez más– algunas ideas centrales de Galois y Riemann: las extensiones de campos no ramificadas (separabilidad de Galois) y las superficies de Riemann no ramificadas, englobadas dentro de un concepto unificador genérico.

63 Véase Pierre Deligne, "Quelques idées maîtresses de l'oeuvre de A. Grothendieck", en: *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e^ siècle*, Seminaires et Congrès 3, Société Mathématique de France, 1998, pp. 11-19.

64 Curiosamente, Grothendieck, quien recorrió con enorme penetración casi todos los campos de la matemática, rara vez se preocupó por la lógica matemática como tal. Esa inquietante separación lógica-matemática –por uno de los dos o tres matemáticos mayores del siglo XX– debería dar mucho que pensar a los filósofos de la matemática centrados en la lógica.

entonces a un complejo panorama –podríamos llamarlo *lógica relativa*– que permite regresar a los orígenes históricos de la lógica matemática (la "lógica de relativos" de Peirce) y reentender con nuevos ojos muchas de las problemáticas acerca de los fundamentos abordadas en forma convencional por la filosofía analítica.

La atención grothendickiana al movimiento de los conceptos y objetos matemáticos va acompañada de una búsqueda oscilante de *arquetipos* para la razón y la imaginación matemática. Entre lo *uno* (la "forma") y lo *múltiple* (las estructuras: esquemas, topos, etc.), Grothendieck descubre e inventa[65] apropiados invariantes de la forma: las cohomologías. Aunque los grupos de homología y cohomología para la topología algebraica tienden a verificar ciertas condiciones de univocidad, al pasar a la geometría algebraica las posibilidades de invarianzas cohomológicas se multiplican (Hodge, de Rham, cristalina, "étale", *l*-ádica, etc.). Grothendieck propone entonces sus ***motivos*** como hondas estructuras genéricas subyacentes a las distintas cohomologías. Vale la pena leer a Grothendieck, pues retomaremos varias ideas de la siguiente cita a lo largo de nuestro ensayo:

> Este tema [de los motivos] es como el *corazón* o el alma, la parte más escondida, la que se sustrae más a la mirada, dentro del tema de los esquemas, que se encuentra a su vez en el corazón mismo de mi nueva visión. (...) Contrariamente con lo que sucede en la topología ordinaria, nos situamos [en la geometría algebraica] ante una abundancia desconcertante de teorías cohomológicas diferentes. Se tenía la impresión muy nítida de que, en un sentido aún vago en un principio, todas esas teorías debían "resultar siendo lo mismo", de que todas "daban los mismos resultados". Es para llegar a expresar esa intuición de "parentesco" entre teorías cohomológicas diferentes, que he despejado [dégagé] la noción de "*motivo*" asociado a una variedad algebraica. Con este término, entiendo sugerir que se trata del "motivo común" (o de la "*razón* común") subyacente a esa multitud de invariantes cohomológicos diferentes asociados a la variedad, gracias a la multitud de todas las teorías cohomológicas posibles *a priori*. Estas teorías cohomológicas diversas serían como suertes de desarrollos temáticos diferentes –cada uno en el "*tempo*", en la "llave" y en el "modo" ("mayor" o "menor") que le fuese propio– de un mismo "motivo de base" (llamado "teoría cohomológica *motívica*"), que sería a la vez la más fundamental, o la más "fina", de todas esas "encarnaciones" temáticas diferentes (es decir, de todas esas cohomologías posibles). Así, el motivo asociado a una variedad algebraica constituiría un invariante cohomológico "último", "por excelencia", del cual todos los otros se deducirían, como suertes de "encarnaciones" musicales, o de "realizaciones" diferentes. Todas

---

65 Ahondaremos, en la sección 4.2, la dialéctica del descubrimiento y de la invención en Grothendieck, una dialéctica que *no puede reducirse* a ninguno de sus dos polos, y estudiaremos con mayor detenimiento, en la tercera parte del trabajo, el hecho de que tanto una posición realista ("descubrimiento"), como idealista ("invención"), son imprescindibles en las matemáticas avanzadas, cuando se supera cierto *umbral de complejidad* para las estructuras, los lenguajes y los tránsitos/obstrucciones en juego.

> las propiedades esenciales de "*la* cohomología" de la variedad ya se "leerían" (o se "escucharían") en el motivo correspondiente, de tal manera que las propiedades y estructuras familiares de los invariantes cohomológicos particulares (*l*-ádicos o cristalinos, por ejemplo) fuesen sencillamente el reflejo fiel de las propiedades y estructuras *internas del motivo*[66].

Las homologías –construcciones matemáticas que ayudan a solventar la "aporía discreto/continuo" (Thom) y que consisten en cadenas de grupos abelianos con las cuales se captura una amplia información del objeto topológico en estudio–, así como las cohomologías –construcciones duales que involucran límites conjuntistas mejor conocidos (productos, pullbacks, etc.)– se convierten, gracias a Grothendieck, en algunos de los "más potentes instrumentarios del siglo"[67]. Al final de su estadía en el IHES, después de sus trabajos en esquemas y topos, Grothendieck vislumbra un difícil y ambicioso *programa motívico*. Al retirarse del mundo matemático y al dejar de publicar, las líneas mayores de desarrollo del programa solo circulan entonces en manuscritos, y muchas de las sugerencias de Grothendieck se consideran demasiado "vagas"[68]. No obstante, Voevodsky introdujo la *cohomología motívica* (1990-2000), un aporte que responde en parte a las esperanzas de Grothendieck, y que le valió la Medalla Fields (2002). En vez de trabajar, como en topología algebraica, con cirugías algebraicas del espacio (cohomología singular, anillo de grupos de cohomología), Voevodsky ha propuesto una colección más delicada de *cirugías de una variedad algebraica*, al introducir nuevas formas de topología para los objetos algebraicos (topologías finas de Grothendieck sobre sitios de esquemas), y al definir una sofisticada *categoría concreta* para las homologías *H(V)* asociadas funtorialmente a variedades *V*. Un *tronco central de las cohomologías* ha empezado entonces a "despejarse", concordando con la extraordinaria intuición matemática de Grothendieck.

---

66 Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, op. cit., "Prélude", pp. 45-46 (comillas y énfasis del autor). La riqueza (conceptual, matemática, estilística, metodológica, fenomenológica) de este párrafo dará lugar a muchas consideraciones en nuestro trabajo. Por el momento, baste con resaltar el movimiento entre lo uno y lo múltiple, la tensión entre lo "último" y las diferencias, la problemática de la fidelidad y la variación, la dialéctica entre lo interno y lo externo, el espectro modal de posibilidades y realizaciones, el enlace de vaguedad y precisión, el entronque corazón-razón, el equilibrio estético.

67 Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, op. cit., p. 43.

68 Lo mismo puede decirse de otra "visión" muy influyente de Grothendieck, el "programa moderado" que esboza en su *Esquisse d'un programme* de 1983. Grothendieck busca formas nuevas de topología, que resulten naturales y que *alisen* las singularidades a las que debe abocarse una topología conjuntista (repleta de ejemplos artificiales provenientes del análisis). Grothendieck intuye que una suerte de deconstrucción ("dévissage", *Esquisse*, op. cit., p. 25) de colecciones de estructuras estratificadas está ligada al descubrimiento de una "topología moderada". Entre los desarrollos del "programa moderado" se encuentran la *tame model theory* y la O-minimalidad en la teoría de modelos contemporánea: otra insospechada resonancia de las ideas de Grothendieck hacia la lógica...

4.2 Metáforas, métodos, estilo

En esta sección analizamos algunas de las metáforas mayores que el propio Grothendieck explicita acerca de sus modos de creación y de sus métodos de trabajo, y observamos algunas de las *resonancias* que se encuentran entre la *producción* matemática de Grothendieck (tanto en una fase imaginativa, como en una fase definicional y teoremática), la *reflexión* del matemático sobre esa producción y la *expresión* formal misma de esa reflexión. Todas estas resonancias constituyen lo que podría llamarse el peculiar *estilo* de Grothendieck.

La metáfora del "martillo" y la "marea subiente"[69] gobierna gran parte de la visión conceptual de Grothendieck. Para Grothendieck, un *problema* puede imaginarse como una suerte de "nuez", cuya dura cáscara habría que penetrar para acceder a la "suave carne" de la nuez. En la concepción de Grothendieck, existen entonces dos estrategias esencialmente distintas para deshacer la cáscara: golpeándola con un martillo y un cincel –a veces resbalando y otras veces rompiendo pedazos de la cáscara pero también del interior– o insertándola en un líquido ("marea") de tal manera que, después de semanas o meses, su exterior se ablandase y se abriese, "con una presión de la mano (...) como un aguacate maduro". La primera estrategia (yang) lleva a *resolver* el problema; la segunda estrategia (yin) lleva a *disolverlo*. Vía una adecuada *inmersión en un medio ambiente natural*, la solución debe *emerger* entonces dentro de un panorama *genérico* que supere las rugosidades particulares de la cáscara. La metáfora captura una metodología matemática precisa que Grothendieck había puesto constantemente en práctica desde al menos treinta años antes: sumergir un problema en una categoría general apropiada (*K*, *klassen*), realizar un hondo trabajo de prescisión[70] conceptual y definicional dentro de esa categoría, descomponer los ejemplos y los objetos dentro de ese marco general, y proceder finalmente al estudio de las correlaciones, tránsitos y ósmosis dentro de la categoría. Después de una incesante (de)construcción abstracta ("dévissage"), el problema podía resolverse entonces con la mayor *suavidad* posible ("aguacate maduro"), sin golpes y sin artimañas artificiales, como lo indica un testimonio directo de Deligne[71].

Yendo aún más allá, la estrategia de la "marea subiente" de Grothendieck lleva a situar en el centro de la atención matemática las preguntas, las nociones y los puntos de vista, por encima de las resoluciones mismas:

> Es realmente por el descubrimiento sobre todo de *preguntas* nuevas, de *nociones* nuevas, o aún de *puntos de vista* nuevos, o de nuevos "*mundos*", que mi obra matemática ha resultado ser fecunda, más que por las "soluciones" que he aportado a preguntas ya planteadas. Esta pulsión muy fuerte que me lleva hacia el descubrimiento de

---

69 Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, op. cit., pp. 552-553.
70 La "prescisión", en el sentido de Peirce, a la vez *escinde y precisa* los linderos del ente bajo análisis.
71 Deligne, "Quelques idées maîtresses...", op. cit., p. 12.

las buenas preguntas, más que hacia el de las respuestas, y hacia el descubrimiento de buenas nociones y enunciados, mucho más que hacia el de las demostraciones, son otros trazos "yin" fuertemente marcados en mi aproximación a las matemáticas[72].

Detrás de un problema, Grothendieck siempre busca así las fuentes (manantiales) de preguntas naturales asociadas al problema. Se trata entonces de un enfoque de los *fundamentos* de la matemática radicalmente diverso al propuesto por la teoría de conjuntos. La "lectura" de Grothendieck es una lectura transversal, donde no importa una base última, sino donde lo que se estudia es el movimiento (*desliz*[73]) de la base, y donde, más que una resolución acumulativa del saber, lo que importa es el enlace movible de las preguntas naturales que subyacen tras las soluciones[74].

De hecho, no se trata siquiera de una "lectura" en Grothendieck, sino de una *escucha* misma. Una articulación entre *imágenes, intuición y oído* resulta ser fundamental para Grothendieck, en contraposición con otros manejos meramente formales del lenguaje. Después de la metáfora de la nuez y de la marea subiente, otra de las metáforas centrales de Grothendieck es en efecto la imagen del matemático creador atento a "la voz de las cosas"[75]. La "belleza escondida de las cosas"[76] resulta ser la belleza escondida de las estructuras matemáticas, una belleza intrínseca que el matemático *descubre gracias a la invención* extrínseca de lenguajes suficientemente expresivos.

---

72 Grothendieck, *Récoltes et Semaillles*, op. cit., p. 554. Por supuesto, tal párrafo solo puede ser apreciado desde una altura muy grande, que pretenda desbrozar los movimientos más salientes de la topografía. No deben olvidarse las (literalmente) miles de páginas de Grothendieck dedicadas a "respuestas" y "demostraciones" dentro de los campos mayores de su producción: "productos tensoriales topológicos y espacios nucleares, cohomología de haces como funtores derivados, K-teoría y teorema Grothendieck-Riemann-Roch, énfasis de trabajo relativo a una base, definición y construcción de objetos geométricos vía los funtores a los que deben representar, categorías fibradas y descenso, *stacks*, topologías de Grothendieck (sitios) y topos, categorías derivadas, formalismos de dualidad local y global (las «seis operaciones»), cohomología *étale* e interpretación cohomológica de las funciones L, cohomología cristalina, «conjeturas estándar», motivos y el «yoga de pesos», categorías tensoriales y grupos de Galois motívicos" (según "breve" lista de contribuciones, en P. Cartier et al., *The Grothendieck Festchrift*, Basel: Birkhäuser, 1990, vol. I, p. viii). Como señala Dieudonné (ibíd., p. 14), "hay pocos ejemplos en matemáticas de una teoría tan monumental y fecunda, edificada en tan poco tiempo y esencialmente debida a un solo hombre".

73 Para Merleau-Ponty, el "punto más alto de la razón" consiste en *sentir el desliz del suelo*, en detectar el movimiento de nuestras creencias y de nuestros supuestos saberes: "cada creación cambia, altera, esclarece, profundiza, confirma, exalta, recrea o crea por adelantado todas las demás" (Maurice Merleau-Ponty, *Notes des cours du Collège de France* (1958-59, 1960-61), París: Gallimard, 1996, p. 92). En *L'oeil et l'esprit* (París: Gallimard, 1964), Merleau-Ponty describe a un cuerpo operante en los dominios del saber como un "haz de funciones que entrelaza visión y movimiento". Mediante incesantes niveles de autorreferencia, el haz permite conjugar interior y exterior, esencia y existencia, realidad e imaginario, y, más aún, es en los bordes borrosos y antinómicos de esas aparentes oposiciones donde el *haz da lugar a la invención y a la creación*. Volveremos en la tercera parte de este trabajo (*capítulo 10*) sobre algunas conexiones entre Grothendieck, Merleau-Ponty y Rota, alrededor de la *aparente oposición* de fondo invención/descubrimiento en la filosofía matemática.

74 Recuérdese aquí la posición similar de Lautman, quien señalaba una "urgencia de los problemas, anterior al descubrimiento de sus soluciones" (este ensayo, pp. 48-49).

75 Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, op. cit., p. 27.

76 Ibíd., p. 28.

Así, en la perspectiva de Grothendieck, las estructuras matemáticas se encuentran dentro del espectro fenomenológico del mundo, y por tanto se descubren, pero se trata de descubrimientos que solo se pueden obtener al inventar –en una dialéctica casi sincrónica– adecuadas *representaciones* de las estructuras. La metáfora misma del "motivo" (musical, cohomológico) refrenda la idea de la existencia de *gérmenes escondidos de estructuración*, que un buen "oído" debería ser capaz de detectar. Así, los motivos de Grothendieck se encontrarían *ya* presentes en la estructura dinámica de las formas, independientemente de sus posteriores descubridores (Voevosdky, Levine, Morel, etc.), cuya labor consistiría esencialmente en crear los lenguajes adecuados, los marcos teórico-prácticos y las cajas de resonancia propicias para hacerlos vibrar. De nuevo, es instructivo oír directamente a Grothendieck:

> La estructura de una cosa no es de ningún modo una cosa que podamos "inventar". Sólo podemos develarla pacientemente, modestamente –conocerla, "*descubrirla*". Si hay alguna invención en ese trabajo, y si realizamos algún tipo de labor de herrero o de infatigable constructor, no es en modo alguno para "dar forma" o para "elevar" estructuras. ¡Éstas no nos han esperado para ser, y para ser exactamente lo que son! Es más bien para *expresar*, lo más fielmente que podamos, esas cosas que estamos descubriendo y sondeando, esa estructura reticente a entregarse, que intentamos cercar a tientas y con un lenguaje tal vez aún balbuceante. Así, nos vemos llevados constantemente a *"inventar" el lenguaje* más apto para expresar finamente la estructura íntima de la cosa matemática, y a "construir", gracias a ese lenguaje, paso a paso y por entero, las "teorías" que deben dar cuenta de lo que ha sido aprehendido y visto. Hay allí un movimiento de vaivén continuo, ininterrumpido, entre la *aprehensión* de las cosas y la *expresión* de lo que es aprehendido, gracias a un lenguaje que se afina y se recrea al hilo del trabajo, bajo la presión constante de las necesidades inmediatas[77].

La recreación incesante, la invención al hilo de entornos de desarrollo de la disciplina, la construcción paso a paso, la expresión a tientas muestran todas la percepción eminentemente dinámica y dialéctica de Grothendieck. Se trata, en efecto, de un "vaivén continuo" en el pensamiento matemático, de un ir y venir a lo largo de un instrumentario de sondas, cuyas categorías ontológicas o epistemológicas *no pueden establecerse por adelantado*, independientemente de la acción (práctica, histórica) de la disciplina. En ese tránsito ineludible que se torna la matemática, en ese mar siempre en movimiento y a menudo enigmático, la *manera* de Grothendieck provee no obstante una honda *orientación* y un sorprendente *anclaje* relativo.

En efecto, Grothendieck cuenta con múltiples *métodos* matemáticos para mantener una orientación dentro de la paisajística variable a la que se asoma. Ante todo, un permanente *ascenso y descenso* permite

77 Ibíd., p. 27. Las comillas y los énfasis siguen siendo del propio Grothendieck.

superar las obstrucciones que yacen en laberintos locales y excesivamente particularizados. El ascenso a lo general no es nunca en Grothendieck una operación gratuita, y se rige por algunos modos cruciales de la práctica matemática: inserción de una situación particular local (objeto, propiedad, ejemplo) en un entorno universal global (categoría) –con ósmosis consiguientes entre manifestaciones de lo singular y formas de lo continuo–, construcción plural de redes y de jerarquías para poder cotejar lo particular dentro de universos relacionales más amplios, descubrimiento de proximidades en una topografía con alturas claramente definidas y con proyectividades de diversos tipos. La generalización es entonces un arma de contrastación, un método de elevación de la visión, que nos ayuda a orientarnos dentro de un relieve complejo.

Una ubicua *dialéctica* (conceptual, lingüística, técnica) gobierna por otro lado toda la "manera" de Grothendieck. Desde lo más vago (el yin y el yang), hasta lo más preciso (adjunciones funtoriales), pasando por tensiones incesantes entre regiones polares de la matemática, el pensamiento de Grothendieck va y viene, sin reposo alguno. Muchas de sus mayores construcciones técnicas –espacios nucleares, K-teoría y Riemann-Roch generalizado, cohomologías, esquemas, topos, motivos– se sitúan a caballo entre núcleos matemáticos aparentemente distantes, hasta culminar en los "dibujos de niños" (1983) que proponen alejados invariantes combinatorios para la teoría de números, a través de sorprendentes mediaciones con el análisis (superficies de Riemann) y con el álgebra (grupos de Galois). La dialéctica funciona en múltiples niveles, desde lo vago e imaginario, hasta lo técnicamente acotado, dentro de un "vasto contrapunto –en una armonía que los conjuga"[78].

Restringiendo la dialéctica a la subdefinición de *tránsitos y obstrucciones* dentro de la actividad matemática, la genericidad de los conceptos y objetos matemáticos (a la Grothendieck) da lugar a otras concreciones originales dentro del espectro de lo *arbitrario* –arbitrariedad entendida como *topos* simultáneo de la mediación ("árbitro", tránsito, continuidad) y de la oposición ("arbitrario", imposición, discreción)[79]–. En efecto, un ente genérico *combina* su definibilidad implícita en un horizonte de posibilidad y su concreción explícita en un horizonte de estratificación (Desanti)[80], al conseguir proyectar su capacidad abstracta de tránsito (en los *possibilia*) sobre el panorama concreto de imposiciones que encuentra (en las jerarquías de lo actual). De aquí emerge entonces un tercer método, muy presente en todos los trabajos de Grothendieck, dentro del "arte" de hacer matemáticas. Se trata realmente de un nuevo *ars combinatorio*, que propone explicar, en cuatro etapas bien definidas, la *unidad dentro de la multiplicidad* en matemáticas, es decir, "la vida misma

78 Ibíd., p. 23.
79 Debo a Roberto Perry y Lorena Ham esta bella lectura dialéctica y etimológica de lo "arbitrario", que da lugar a una compleja "terapéutica de la arbitrariedad" en Perry y Lam.
80 Jean Toussaint Desanti, *Les Idéalités mathématiques*, París: Seuil, 1968.

y el soplo"[81] de la disciplina: 1. Estratificación incesante de la actividad matemática; 2. Ramificación de ambientes categóricos de interpretación; 3. Deconstrucción recursiva ("dévissage") de los conceptos en juego, a lo largo de las múltiples jerarquías categóricas disponibles; 4. Armazón de enlaces relacionales (diagramas de transferencias y obstrucciones) entre las deconstrucciones realizadas.

La *manera*[82] de Grothendieck –mixtura de vaivenes verticales (ascenso/descenso), horizontales (dialécticas/polaridades) y diagonales (reflejos entre jerarquías estratificadas)– da lugar a un *estilo* mismo que permite expresar con naturalidad esos modos de hacer matemáticas. Entenderemos aquí "estilo" como superposición de redes de "marcas" (recordando al *stilus* con el que se marcaban las tablas babilónicas) y de "engranajes" entre las redes, en tres registros matemáticos fundamentales[83]: *(a)* la invención inicialmente vaga, *(b)* la delimitación posterior de la vaguedad y la consiguiente expresividad demostrativa, *(c)* la reflexión crítica sobre el cuerpo demostrativo que ha podido ser elaborado. Desde esta perspectiva, el estilo de Grothendieck es de sumo interés puesto que se extiende ampliamente en los tres registros[84], y, en el sentido etimológico del término "estilo", consigue una verdadera conjugación "decir-pensar" (*lexis*)[85] en cada ámbito. De hecho, Grothendieck auto-describe su "genio particular"[86] como aquel capaz de introducir grandes temas nuevos y *puntos de vista* unificadores dentro de la diversidad, y la habilidad de Grothendieck en el "decir" –esto es, la *riqueza de marcas de su estilo*– resulta ser una herramienta imprescindible para su capacidad unitaria en el "pensar".

La correspondencia con Serre[87] revela la energía indomable de Grothendieck, su potente inventividad matemática, su pasmosa capacidad

81 Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, op. cit., p. 16.
82 En la teoría del arte de los siglos XVI y XVII, la *maniera* se encuentra en el núcleo de las discusiones críticas sobre los "modos de hacer" (inventar, crear) de los grandes pintores. Al degenerar la *maniera* en *manierismo*, emerge posteriormente la noción de *estilo* como sustituto conceptual para captar las categorías mayores de la historia del arte (barroco, clásico, romántico, etc.). En la tercera parte de este trabajo, abordaremos la problemática de cómo intentar definir intrínsecamente (no solo diacrónicamente como lo hemos hecho hasta el momento) algunas de las grandes delimitaciones de estilos en matemáticas: "clásico", "moderno", "romántico", "contemporáneo". La *maniera* de Grothendieck abre compuertas importantes para intentar acercarse a esas delimitaciones intrínsecas. Es algo que ya hemos abordado en nuestro *capítulo 1* –con las condiciones *(i)-(v)* alrededor de las cuales Lautman explora la matemática "moderna", y con las condiciones *(vi)-(x)*, muy ligadas a la *maniera* de Grothendieck, sobre las que nosotros nos acercamos a lo "contemporáneo"– pero que estudiaremos con mayor detenimiento en el *capítulo 11*.
83 Estos tres registros corresponden a formas de las tres categorías peirceanas: *(a)* primeridad y abducción; *(b)* segundidad y contrastación; *(c)* terceridad y mediación. La *lógica de la investigación científica*, extensamente estudiada por Peirce, se acopla a precisos modos de transformación de la información entre esas tres categorías. Volveremos sobre estas cuestiones en el *capítulo 10*.
84 *(a):* Correspondencia; *(b):* EGA, SGA, artículos; *(c): Récoltes et Semailles*. En cada registro, el estudioso cuenta con cientos de páginas para desarrollar sus observaciones.
85 Véase la entrada "Style", en Barbara Cassin (ed.), *Vocabulaire européen des philosophies*, París: Seuil, 2004, p. 1226.
86 *Récoltes et Semailles*, op. cit., p. 15.
87 Pierre Colmez, Jean-Pierre Serre (eds.), *Correspondance Grothendieck-Serre*, París:

de abstracción y concentración, pero también sus dudas y errores, su deseo de "cultivarse" gracias al enorme conocimiento matemático de su corresponsal, así como el melancólico ocaso de su gran brillantez crítica (últimas cartas 1985-87 alrededor de *Récoltes et Semailles*). La enorme complejidad técnica de la correspondencia[88] no impide que se puedan detectar muchos de los momentos en los que van *emergiendo* las ideas de Grothendieck *al paso de los días*. Resaltan, entre otros, desde el punto de vista del *estilo*, el "diluvio de cohomología" (1956) que da lugar al artículo "propuesto a Tannaka para el *Tohoku*", cuya escritura es contrastada con las "demostraciones realmente desalentadoras de Weil"[89]; la incesante preocupación de Grothendieck por definir conceptos e ideas "nítidamente naturales"[90], que distingan su *manera* de hacer matemáticas de otras prácticas artificiales; la presencia de una "razón yógica plausible"[91] que ayude a especificar y orientar ciertas especulaciones generales; la explosión de larguísimas "cartas-río" (1964) en el momento de la invención de ideas grothendickianas sobre la cohomología *l*-ádica (que llevarían diez años después a la resolución de las conjeturas de Weil). La nutrida correspondencia –que iba acompañada de horas (!) de conversaciones telefónicas entre Grothendieck y Serre, un modo enteramente original (e incomprensible para los demás mortales) de compartir altas matemáticas– deja entrever una matemática en *gestación*, movible, imbuida de un vigor notable, llena de aproximaciones entre conceptos distantes, en proceso de afinamiento, con una corrección permanente de errores (naturales) entre una carta y otra. Al poder vislumbrar un atisbo del herrero en su fragua, podemos *ver* entonces una matemática *real*, muy distinta de aquella que las corrientes predominantes de la filosofía analítica nos han enseñado a "apreciar".

Como contraparte de su inusual talento para el "descubrimiento" y de su facilidad para afinar el oído a la escucha de la *voz de las cosas*, Grothendieck posee también una inusual sensibilidad en el manejo del lenguaje, que se logra concretar en una "invención" *terminológica* tan explosiva como la inventividad matemática misma. Parte integral del estilo matemático de Grothendieck, la terminología conforma de hecho un universo entero en sí mismo. Con la misma fascinación que expresa Proust en *Noms de pays: le nom*[92], Grothendieck declara que "una de mis pasiones

---

Société Mathématique de France, 2001.

88 En la correspondencia no aparecen comentarios extramatemáticos, excepto un breve intercambio Grothendieck-Serre-Cartan (1961) acerca de los problemas que el servicio militar producía para los jóvenes matemáticos. Ibíd., pp. 121-128.

89 Ibíd., pp. 38, 49.

90 Ibíd., p. 111.

91 Ibíd., p. 181. El neologismo burlón "yógica" convoca el *yoga* grothendickiano (enlace "vago" de dialécticas yin-yang) y se contrapone con una *lógica* pretendidamente precisa y formal.

92 Es la tercera parte de *Du côté de chez Swann*. Véase Marcel Proust, *À la recherche du temps perdu*, París: Gallimard, 1997 (la última edición, de Jean-Yves Tadié, coteja todas las variantes de los manuscritos originales y explora por tanto a fondo el *lugar de la inventividad* proustiana).

ha sido constantemente *nombrar* las cosas que se descubren ante mí, como un primer medio para aprehenderlas"[93], y señala que

> Desde un punto de vista cuantitativo, a lo largo de mis años de productividad intensa, mi trabajo se ha concretado sobre todo en unas doce mil páginas de publicaciones, bajo la forma de artículos, monografías o seminarios, y por medio de centenares, si no miles, de nociones nuevas que han entrado en el patrimonio común, con los nombres mismos que les había dado al despejarlas [dégagées]. En la historia de las matemáticas, creo ser aquel que ha introducido en nuestra ciencia el mayor número de nociones nuevas y, a la vez, ser aquel que se ha visto llevado a inventar el mayor número de nombres nuevos, para expresar esas nociones con delicadeza y de la manera más sugestiva posible[94].

La "delicadeza" del nombre, la "sugestividad" de las metáforas, la profusión de nombres que van modificando un "patrimonio común" no se contemplan en los tratados de filosofía matemática. Aún en escuelas atrapadas por la fascinación del lenguaje, no se ha realizado ningún estudio del lenguaje *matemático real*, aunque se elaboren largas disquisiciones sobre un lenguaje que supuestamente es capaz de suplantar a las matemáticas mismas. No es nuestra contención adentrarnos en el lenguaje matemático, pero hay que señalar que la invención terminológica de Grothendieck debe ser explorada, en otros ámbitos, con el cuidado que merece.

4.3 Tres textos paradigmáticos: *Tohoku*, EGA, Seminario Cartan

En esta última sección recorremos tres textos específicos de Grothendieck, intentando develar a la vez algunas de las grandes líneas de tensión de la producción de Grothendieck, como se han subrayado en la primera sección, y algunos de los procedimientos metodológicos, metafóricos y estilísticos indicados en la segunda sección. Nos ocuparemos de tres textos paradigmáticos:

- el *Tohoku* (publicado en 1957, pero que *emerge* desde 1955, como vimos al mencionar la correspondencia con Serre);
- los primeros capítulos del gran tratado *Éléments de Géometrie Algébrique* (publicados en 1960, pero en gestación desde unos años antes, como también se deduce de la correspondencia con Serre);
- la extraordinaria serie de exposiciones en el Seminario Cartan de 1960-61 acerca de temas en "geometría analítica" (entendida, a la manera de Cartan y Dieudonné, como geometría de las funciones analíticas).

93 *Récoltes et Semailles*, op. cit., p. 24.
94 Ibíd., p. 19.

Como lo señala Grothendieck al comienzo del *Tohoku*, el artículo intenta explicitar un "cuadro común" que permita sustentar la "analogía formal"[95] entre la cohomología a coeficientes en un haz y la serie de funtores derivados de funtores de módulos. El trabajo se escribe en el momento mismo en el que la noción de haz entra a formar parte imprescindible de la investigación matemática[96], una investigación en desarrollo de la cual Grothendieck deja constancia al mencionar sus "conversaciones"[97] con Cartan, Godement y Serre. Así, desde el inicio mismo del *Tohoku* las "analogías" vagas y las formas dinámicas de la creatividad aparecen en el texto de Grothendieck, quien inmediatamente procede a *inventar* el lenguaje (categorías aditivas y abelianas) y a *descubrir* la riqueza de las estructuras matemáticas (haces, objetos inyectivos vía productos y sumas infinitas, acciones de grupo) que explican la "analogía formal" inicial. En particular, las acciones de los grupos en juego se *estratifican* en una precisa jerarquía de niveles –acción sobre un espacio (primero) X, acción sobre un haz (segundo) O de anillos sobre X, acción sobre un haz (tercero) de módulos sobre O– concretando así una de las formas típicas del proceder grothendieckiano. La estrategia da lugar a las diversas partes del artículo: (I) categorías abelianas (*lenguaje*); (II) álgebra homológica en categorías abelianas y (III) cohomología con coeficientes en un haz (*estructuras*); (IV) cálculos de *Ext* para haces de módulos y (V) cohomologías con espacios de operadores (*transferencias y acciones*).

La "gran visión" de la teoría de categorías propuesta por Grothendieck en la sección (I) se mantiene extraordinariamente fresca cincuenta años después[98]. Se trata de una larga sección inicial (20 páginas) en la que Grothendieck establece los tres claros niveles del pensamiento categórico –morfismos, funtores, transformaciones naturales (llamadas en el texto "morfismos funtoriales"[99])–, introduce sus categorías aditivas y abelianas, compara axiomas de existencia de productos infinitos, establece la existencia de suficientes inyectivos (vía diagramas, generadores y productos) y

---

95 Grothendieck, "Sur quelques points d'algèbre homologique", op. cit., p. 119.

96 El concepto de *haz matemático* surge en la obra de Jean Leray (curso de topología algebraica en el Oflag XVII (1943-45), serie de notas en los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (1946), cursos sobre sucesiones espectrales en el *Collège de France* (1947-50)) y alcanza su desarrollo definitivo en el Seminario de Henri Cartan en la *École Normale Supérieure* (1948-51). Un haz es un tipo de objeto matemático que permite pegar globalmente aquello que resulta ser coherentemente traslapable dentro de lo local: ciertos objetos matemáticos pueden entonces entenderse mejor gracias a una lógica de *vecindades y mediaciones* sobre un espacio continuo (descartando binarismos sí-no), y gracias a acciones naturales de grupoides en las fibras del haz.

97 Ibíd., pp. 120-121. Grothendieck habla también del "interés" de sus colegas, que habría sido el "estimulante indispensable" para su trabajo. El entorno vivencial de los matemáticos, resaltado por Rota como parte indispensable en la comprensión fenomenológica del mundo matemático, se evidencia aquí una vez más.

98 Podríamos considerar este ensayo, en buena medida, como un homenaje al *Tohoku*, cincuenta años después (2007) de su aparición. Sería tal vez demasiado exagerado describir a la matemática contemporánea como una serie de "notas al pie" a la obra de Grothendieck, pero la exageración tendría un fondo de verdad incuestionable.

99 Ibíd., p. 124.

desarrolla las categorías cociente[100]. En ese proceso, resultan notables los *ejemplos* de Grothendieck, situados como pequeñas joyas cristalinas en el vaivén de ascenso y descenso entre lo universal y lo concreto: como instancias de categorías aditivas no abelianas[101] aparecen por ejemplo los módulos topológicos separados, los grupos abelianos filtrados, los espacios fibrados holomorfos sobre una variedad de dimensión 1. De esta manera, la *riqueza topográfica* del pensamiento matemático de Grothendieck nunca es gratuita, no se asciende nunca por impulsos de generalización artificial y se contempla siempre un panorama vívido en cumbres y valles *específicos*. Esto es algo que se refrenda también con la comparación de distintos axiomas para productos infinitos mediante clases concretas de categorías que los distinguen[102], con un "ejemplo divertido"[103] alrededor de las cohomologías sobre un espacio irreducible, con un ejemplo profundo sobre representaciones de haces de gérmenes y de formas diferenciales sobre variedades holomorfas[104], o con ejemplos de manejos funtoriales que permiten reconstruir argumentos previos en los cuales Grothendieck utilizaba la maquinaria de recubrimientos de Cech[105].

El "cuadro común" que emerge del *Tohoku* –construido para permitir el estudio de *enlaces naturales* entre la geometría algebraica, la topología, la variable compleja, los cálculos cohomológicos– modifica entonces el panorama de la matemática. Al enfocar sus esfuerzos sobre un concepto/objeto matemático *pivote* (el haz matemático), al definir los entornos generales en donde los haces pueden ser estudiados en su unidad/multiplicidad (las categorías abelianas), y al poner todo este instrumentario al servicio de la comprensión de las formas profundas de las estructuras (las cohomologías), Grothendieck produce en las matemáticas no solo un "giro copernicano", sino un verdadero "giro einsteiniano", si se nos

---

100 Grothendieck denomina "lenguaje módulo *C* de Serre" la idea de variación sobre la base (ibíd., p. 137). Dado que se trata de una de las ideas centrales que gobernarán buena parte de la "matemática relativa" y de la "marea" grothendieckiana, resulta muy interesante observar cómo, *en el momento mismo de emergencia de la idea*, Grothendieck veía en Serre al "creador" de la "modulación vía *C*". Se trata de una prueba más de la incesante *contaminación* de la matemática, con toda suerte de *residuos* en una red de mixturas y de impurezas que queda por fuera de los modos de observación de la filosofía analítica.

101 Ibíd., p. 127.

102 Ibíd., p. 129. Aparecen la categoría de grupos abelianos, su categoría dual de grupos topológicos abelianos compactos y la categoría de haces de grupos abelianos sobre un espacio topológico dado. Las herramientas de traslado (dualidad de Pontrjagin) y de salto *integral* de nivel (haces) se ponen al servicio del entendimiento *diferencial* entre categorías: gérmenes de un muy abstracto cálculo diferencial e integral contemporáneo.

103 "Un exemple amusant", ibíd., p. 160. La "diversión" no es de buena presentación en la matemática "formal", pero es sin duda uno de los motores importantes del matemático creador, algo que resulta ser por supuesto indiscernible tanto en la matemática "normal" (serie de textos publicados en la comunidad), como en las discusiones filosóficas de ese legado normal.

104 Ibíd., pp. 165-166.

105 Ibíd., pp. 161, 213. El enlace entre las descripciones funtoriales y los recubrimientos de tipo Cech puede verse probablemente como el origen mismo de las topologías de Grothendieck.

permite forzar un poco la metáfora[106]. La visión de Grothendieck llega aun a *trascender* el marco que él mismo elabora, pues, en una fulgurante premonición, observa que "sería indicado dar un tratamiento de «álgebra homológica no conmutativa»"[107] en un contexto de funtores y categorías que englobe a la teoría de fibraciones y a las extensiones de grupos de Lie: prospección asombrosa de fragmentos del programa de geometría no conmutativa de Connes, que revisaremos en el *capítulo 6*.

Los *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA) incorporan, al igual que el *Tohoku*, las características más visibles del proceder de Grothendieck. Aunque el nivel metafórico, analógico y estilístico se reduce al mínimo en los EGA –una asepsia debida en buena medida a la coescritura férrea con Dieudonné–, estos incorporan una "gran visión" (una matemática *en acción* que debe proveer las bases para atacar las conjeturas de Weil: "labor apenas emprendida"[108] en 1960), un modo *abierto* de impulsar y presentar la disciplina[109], un claro panorama global y unas técnicas locales bien delineadas[110], un modo general de hacer matemáticas dentro de contextos (*categorías*) sensibles al tránsito/obstrucción de la información (*funtores*,

---

106 Por su lado, Peirce realiza lo que podríamos llamar un "giro einsteiniano" en la filosofía. Por supuesto, aunque Peirce precede a Einstein y el apelativo es paradójico, la semiosis universal peirceana y su construcción asociada de invariantes relacionales se ajustan con precisión a la "revolución" que solo una década más tarde generaría Einstein en la física moderna. En la semiosis peirceana, el sujeto y el objeto no son considerados como predicados monádicos sino como *redes* relacionales de signos diversos, insertos en entramados de referencia sujetos a una perpetua dinámica ("semiosis ilimitada"); en esa dinámica de *movimientos relativos*, la observación misma del objeto puede llegar a modificarlo. Peirce intenta, entonces, encontrar invariantes en ese fluir relacional complejo: el "giro einsteiniano" de su filosofía busca (y encuentra) lo que podríamos llamar invariantes filosóficos de la lógica general de relaciones y de lógicas de órdenes superiores. La relatividad de la mirada, la dinámica ilimitada de la interpretación, la modificación de los interpretantes, son algunas de las grandes conquistas del sistema peirceano, conquistas que refrendará repetidamente el siglo XX bajo los más diversos disfraces. Sin embargo, Peirce supera, con los procesos permanentes de *reintegración* y de *pegamiento* de su sistema, el extremo relativismo al que se verán abocadas algunas reivindicaciones de lo efímero y de lo local en las postrimerías del siglo. Extenderemos en la tercera parte de este ensayo las ideas anteriores alrededor de un supuesto "giro einsteiniano" en filosofía (Peirce) y un supuesto "giro einsteiniano" en matemáticas (Grothendieck). Si esas aproximaciones son medianamente correctas, la filosofía de las matemáticas debe a su vez efectuar *un giro considerable*.

107 Ibíd., p. 213.

108 EGA, op. cit., I, p. 9 (nota al pie).

109 "Todos los capítulos son considerados como abiertos", ibíd., p. 6. De hecho, obsérvese cómo el capítulo 0 termina con la frase "*(A suivre)*" (ibíd., p. 78), algo bastante insólito dentro de la literatura matemática, donde los textos se presentan usualmente como "acabados". La matemática *en gestación* termina por emerger siempre (por más escondida que parezca a veces) en los trabajos de Grothendieck.

110 Dadas dos variedades algebraicas X, Y (o, más generalmente, dados dos esquemas), el estudio de las propiedades de un problema P en una vecindad de $y \in Y$ es aproximado a través de sus transformaciones/obstrucciones mediante un morfismo (propio) entre X y Y, siguiendo precisas etapas en el análisis del problema: (i) introduciendo el estudio de un adecuado anillo local A sobre y; (ii) reduciendo ese estudio al caso A artiniano (con lo que se pasa a una "mejor comprensión del problema, de naturaleza «infinitesimal» a este nivel" (ibíd., p. 8)); (iii) realizando adecuados pasajes gracias a la teoría general de los esquemas; (iv) permitiendo describir las extensiones algebraicas de A (labor primordial de la geometría algebraica) mediante adecuadas secciones multiformes de los esquemas.

transformaciones naturales)[111], y una búsqueda permanente por encontrar las nociones *naturales* que gobiernan esas ósmosis[112].

Como vimos en la sección 4.1, los esquemas permiten elaborar una unificación importante de las visiones de Galois y de Riemann, un hecho global que queda refrendado localmente cuando Grothendieck y Dieudonné explican que el "retraso en la clarificación conceptual"[113] de la teoría de los esquemas puede haberse debido en buena medida a la identificación entre los *puntos* de un esquema propio X sobre un *anillo* A de valuación discreta y los *puntos* del tensorial $X \otimes_A K$ sobre el *campo* de fracciones K de A. De hecho, la mirada analítica usual –atareada en observar puntos y alejada de una lectura sintética atenta a las secciones en un haz (que no proceden en general de puntos)– es la que *impide* la emergencia de la teoría de esquemas, y es la que *obstruye* el *cambio natural de categoría* que debe llevar a trabajar sobre anillos en vez de campos. Nos encontramos aquí entonces ante modos de visión aparentemente vagos y generales (análisis *versus* síntesis), pero que adquieren una enorme riqueza e importancia técnica que *afecta* profundamente el desarrollo de teorías precisas y bien definidas. Entre otros muchos ejemplos que revisaremos posteriormente, este *hecho concreto* dentro de tensiones universales, este *residuo material* dentro de dialécticas ideales, muestra la importancia –acotada, instrumental, rastreable– de una oposición fundamental analítico/sintético que ciertas corrientes de la filosofía, siguiendo a Quine, querrían hacer desaparecer.

En los EGA, en una nota a pie de página, Grothendieck y Dieudonné señalan que la geometría algebraica, extendida al universo de los esquemas, debería poder servir "como una suerte de modelo formal"[114] para la geometría analítica (es decir, para la teoría de los espacios analíticos u holomorfos). Un poco después, Grothendieck elabora sus "Técnicas de construcción en geometría analítica"[115], una notable serie de comunicaciones propias de los "seminarios": producidas en la punta del saber del momento y *emergiendo*

---

111 Varias secciones del capítulo 1 ("El lenguaje de los esquemas") responden precisamente al estudio de los esquemas desde el punto de vista de la *categoría* de pre-esquemas que los engloba: productos (§3), subobjetos (§4), condiciones de separabilidad (§5), condiciones de finitud (§6). En forma similar al *Tohoku*, se introducen sofisticados ejemplos (en anillos de polinomios, ibíd., p. 139) para distinguir mediante modelos apropiados las diversas condiciones de separabilidad.

112 "Las construcciones habituales que sugiere la intuición geométrica pueden transcribirse, *esencialmente de una única manera razonable*, en este lenguaje [de los esquemas]" (ibíd., p. 9, nuestras cursivas). Se expresa así, una vez más, una de las hondas convicciones de Grothendieck: detrás de la pluralidad de las estructuras y de los signos, la construcción (invención) de un adecuado lenguaje debe permitir hacer emerger la *naturalidad* de ciertas estructuras-"unas" (descubrimiento) desde donde deberían poder proyectarse las demás estructuras-"múltiples" en juego. Se trata, ni más ni menos, que de un sorprendente renacimiento de una suerte de *metafísica matemática* que busca (y encuentra) *nuevos arquetipos detrás de lo relativo*. Tendremos ocasión de discutir ampliamente esta situación en la tercera parte de este trabajo.

113 Ibíd., p. 119.

114 Ibíd., p. 7.

115 Alexander Grothendieck, "Techniques de construction en géométrie analytique I-X", *Séminaire Henri Cartan*, tomo 13, París: Secrétariat Mathématique, 1960-61. El conjunto cubre cerca de 200 páginas.

al correr de los días. El objetivo de Grothendieck queda explícito desde el comienzo mismo de sus exposiciones[116]: 1. despejar ("dégager") un mecanismo funtorial general para el manejo de módulos, aplicado en particular al caso de la variable compleja; 2. despejar una "buena formulación" de problemas de módulos en el marco de los espacios analíticos; 3. enlazar propiedades de proyectividad con teoremas de existencia en ese marco ("espacio de Teichmüller"); 4. acercar el marco de los esquemas (geometría algebraica) y el marco de las variedades holomorfas (geometría analítica), aprovechando en particular, en ambos casos, las propiedades cruciales de ciertos elementos nilpotentes en anillos locales. Una vez más, encarnan en lo concreto los métodos genéricos de Grothendieck: los procesos de ascenso (funtorialidad general, problemáticas en la abstracción, marcos globales) y de descenso (proyectividad, módulos complejos, anillos locales, nilpotencia), la dialéctica de lo uno y lo múltiple (acercamiento de marcos, funtorialidad específica de módulos, enlaces entre proyectividad y existencia), y, en suma, *la estructuración jerárquica del saber matemático en niveles circulatorios*, donde se *combinan* la rica multiplicidad conceptual de cada objeto (o morfismo), la colección de funtores que permite "medir" la multiplicidad diferencial en cada nivel, y la colección de transformaciones (naturales) que permite reintegrar las marcas diferenciales encontradas.

Sin poder entrar aquí en excesivos detalles técnicos, la primera comunicación de Grothendieck en sus "Técnicas de construcción en geometría analítica" encapsula de por sí toda la riqueza de su pensamiento matemático. El objetivo consiste en construir un espacio analítico de representación universal ("espacio de Teichmüller") que clasifique a todas las demás curvas algebraicas sobre los espacios analíticos[117]; Grothendieck procede entonces a describir axiomáticamente las propiedades funtoriales[118] que debe verificar ese espacio, y condiciona teoremáticamente su existencia (global) a la existencia de una jerarquía escalonada (local) de adecuados funtores fibrantes ("funtores de Jacobi") que permitan controlar el número de automorfismos de las estructuras en juego (funtores rígidos)[119]. A su vez, la explicitación de estas condiciones técnicas se consigue por medio de recubrimientos, acciones de grupo, cambios de base y operaciones libres sobre los mismos funtores rígidos[120]. Nos encontramos entonces ante una verdadera matemática en movimiento, una matemática relativa que, no obstante, permite encontrar ciertos invariantes universales ("espacio de Teichmüller") *debido a la variación misma* de los objetos matemáticos locales, a lo largo de una fina jerarquía de mediaciones que da lugar al objeto matemático global.

---

116 Ibíd., exp. 7, p. 1.
117 Ibíd., exp. 7, p. 8.
118 Ibíd., exp. 7, p. 6. Grothendieck califica de "vagas" esas propiedades en primera instancia, y proporciona luego descripciones técnicas precisas.
119 Ibíd., exp. 7, p. 32.
120 Ibíd., exp. 7, pp. 18-21 (recubrimientos y grupos), pp. 2*ss* (bases), pp. 27*ss* (funtores).

El legado de Grothendieck dentro del panorama de las matemáticas contemporáneas es cada vez más evidente, a medida que se desarrolla la disciplina y que los avances técnicos corroboran muchas de las intuiciones mayores del gran matemático francés[121]. Pretenderemos, en los capítulos siguientes, ampliar ese espectro contemporáneo, al revisar las obras de otros matemáticos de primera talla, que en parte prosiguen y en parte complementan a Grothendieck, para luego, en la tercera parte, intentar reflexionar –en ámbitos ontológicos, epistemológicos, metodológicos y culturales– sobre ese extenso espectro, usualmente ignorado en los tratados de filosofía matemática.

121 Esto es particularmente notorio alrededor de su "Esbozo de un programa", op. cit., con las conexiones allí inauguradas entre combinatoria, teoría de números y análisis funcional, que se han extendido, para gran sorpresa de la comunidad científica, a la física teórica y a la cosmología. Volveremos sobre esto en el *capítulo 6*, al acercarnos a Connes y a Kontsevich.

Capítulo 5

Matemática *eidal*. Serre, Langlands, Lawvere, Shelah

En los tres próximos capítulos recorreremos otros ejemplos de "alta matemática" en acción, con la convicción de que la matemática avanzada –y, en este caso, la matemática contemporánea– provee *nuevas* problemáticas y herramientas para la filosofía, que estudiaremos en la tercera parte del trabajo. Para presentar más cómodamente el panorama matemático, distribuiremos algunos impactantes aportes creativos en tres espectros complementarios: matemática "*eidal*", "*quiddital*" y "*arqueal*". Por supuesto, estos ámbitos matemáticos (y los neologismos que los denominan) *no existen bien delimitados* como tales, y deben entenderse sólo como subterfugios expositivos para aligerar la presentación y para intentar otorgar una *orientación débil* en medio de un relieve complejo.

En efecto, detrás de la pregunta central de la fenomenología –¿cómo *transitar* entre lo múltiple y lo uno? con sus subpreguntas polares ¿cómo unir los fenómenos gracias a las categorías, cómo multiplicar lo universal en lo diverso?– subyacen cruciales *modos de transformación* del conocimiento *y* del mundo natural. Mediaciones, jerarquizaciones, concatenaciones, polarizaciones, inversiones, correlaciones, triadificaciones son, por ejemplo, series de transformaciones que llevan a la explicitación parcial de algunas categorías universales[122], tanto en el conocimiento (reorganizando la herencia kantiana alrededor de los tránsitos entre el *noumenon* y el *phenomenon*), como en el mundo físico mismo[123]. Dentro de ese *transformismo* universal –presente desde los inicios mismos de la filosofía griega, y, en el ámbito de las matemáticas, codificado ahora en la

---

122 Este manejo *transformacional* puede verse por ejemplo, con inmenso detalle, en la emergencia de las tres categorías peirceanas, como queda patente en la tesis doctoral de André de Tienne, *L'analytique de la représentation chez Peirce. La genèse de la théorie des catégories*, Bruxelles: Publications des Facultés universitaires Saint-Louis, 1996.

123 Esto es particularmente visible en la física y en la biología contemporáneas, cada vez más imbuidas por consideraciones dinámicas, ligadas a la descripción-comprensión de "diagramas de tránsito". La matemática –a caballo entre el entendimiento "puro" y el mundo físico– incorpora aún con mayor razón, de manera notoria y visible, el estudio de *problemáticas generales y particulares del tránsito*, como lo hemos venido indicando a lo largo del texto.

teoría matemática de categorías– ha podido detectarse siempre un doble movimiento en permanente reajuste: 1. una serie oscilante de ascensos y descensos en el entendimiento; 2. una búsqueda de invariantes detrás de esas oscilaciones naturales. Llamaremos aquí *eidal* (de *eidos*, "idea") un movimiento de ascenso, *quidditas* (de *quidditas*, "lo que es") un movimiento de descenso, y *arqueal* (de *arkhê*, "principio") la búsqueda de invariantes conceptuales en las diversas formas del tránsito.

El *eidos* involucra, en su misma etimología, el enlace de ver (*idein*) y saber (*oida*). Al "elevarse" al mundo de las ideas, desde una perspectiva más alta, el observador contempla un panorama abierto y puede "ver" más lejos. La visión extensa se conjuga entonces con un saber más amplio. No es otro el interés de las grandes "ideas" en matemáticas: abren un inmenso campo de acción, permiten organizar programas de trabajo, desbrozan horizontes, orientan al subespecialista. Las ideas se combinan a su vez con las imágenes (*eidola*), y a menudo consisten entonces en sorprendentes *transvases de la forma*. En lo que sigue, veremos cómo algunos incisivos aportes contemporáneos en matemáticas responden, de manera técnica, a sofisticados transvases de la forma en el mundo conceptual de las ideas matemáticas.

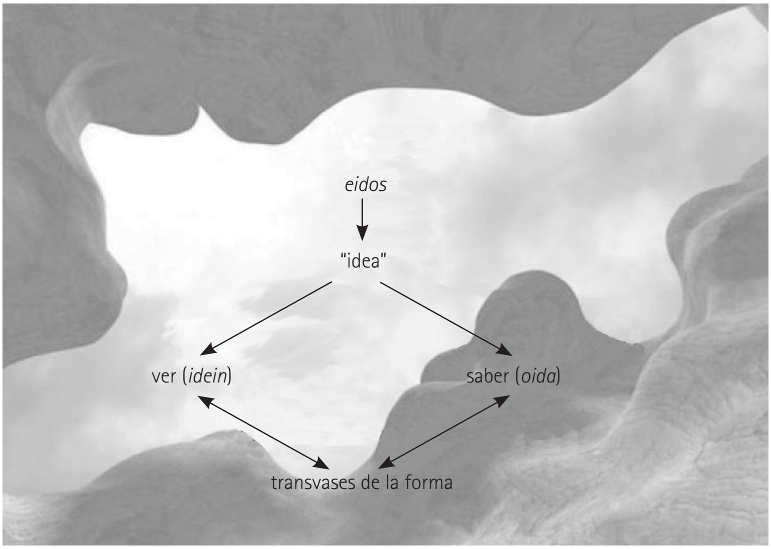

Figura 7. *El ámbito de lo eidal*

Gran dialogador y propulsor de la obra de Grothendieck –suerte de *punching partner* de su amigo, como hemos visto en el capítulo anterior– **Jean-Pierre Serre** (Francia, n. 1926) puede considerarse, por su cuenta, uno de los matemáticos mayores del siglo XX. Medallista Fields (1954) y Premio

Abel (2003)[124], Serre acumula las más altas distinciones de la comunidad matemática, en reconocimiento a sus brillantes inicios investigativos[125] y a la obra ya madura de un creador y conocedor ejemplar. Los principales trabajos de Serre cubren un muy extenso espectro matemático: 1. estudio de los grupos de homotopía de hiperesferas mediante espacios fibrados de caminos (con cálculos espectaculares, como la determinación de las doce aplicaciones continuas entre una esfera de dimensión 6 y una esfera de dimensión 3); 2. trabajos fundacionales en el cruce de la geometría algebraica y la geometría analítica, basados en la emergente teoría de haces: *FAC*[126] y *GAGA*[127]; 3. representaciones de Galois asociadas a grupos formales, variedades abelianas y formas modulares (que enlazarían, entre otras conjeturas, el Teorema de Fermat con los avances centrales en geometría algebraica y teoría de números). Serre señala cómo sus trabajos, *aparentemente* dispersos, responden no obstante a un mismo modo de observar y transformar las problemáticas, gracias al uso de herramientas *transversales* y a la aparición de *mixtos* (recuérdese a Lautman) donde lo uno y lo múltiple se conjugan técnicamente:

> Trabajo en varios temas aparentemente diversos, pero en realidad están todos relacionados entre sí. No siento que yo esté realmente cambiando. Por ejemplo, en teoría de números, teoría de grupos o geometría algebraica, uso ideas provenientes de la topología, como cohomología, haces y obstrucciones. Desde ese punto de vista, disfruto especialmente al trabajar sobre representaciones l-ádicas y formas modulares: se requiere allí teoría de números, geometría algebraica, grupos de Lie (tanto reales como l-ádicos), q-expansiones (estilo combinatorio) – una maravillosa mixtura[128].

Diversas concreciones dentro del ámbito de los “transvases de la forma” surgen en la obra de Serre. Cuando en el GAGA, por ejemplo, Serre

124 La citación del Premio Abel le honra “por jugar un papel central en delinear la forma moderna de varias partes de las matemáticas, incluyendo topología, geometría algebraica y teoría de números”. Obsérvese la importancia de la *forma* en la citación. El laxo adjetivo “moderno” resulta en cambio inadecuado según nuestros lineamientos.

125 Serre sigue siendo aún el más joven Medallista Fields de la historia.

126 Jean-Pierre Serre, “Faisceaux algébriques cohérents”, *Annals of Mathematics* 61 (1955): 197-278.

127 Jean-Pierre Serre, “Géométrie algébrique et géométrie analytique”, *Ann. Inst. Fourier* 6 (1956): 1-42.

128 Martin Raussen, Christian Skau, “Interview with Jean-Pierre Serre”, *Notices AMS* 51 (2004): 210-214, cita en p. 211. Acerca del *modo de creación* subyacente en la emergencia de esa “maravillosa mixtura”, es interesante señalar que Serre habla de “ideas en la mente que pueden ser útiles, pero que no se sabe exactamente para qué son útiles”, así como de un “trabajo de noche (medio-dormido)” que “le proporciona a la mente una concentración mucho mayor y le permite más fácilmente intercambiar temas” (en: C.T. Chong, Y.K. Leong, “An Interview with Jean-Pierre Serre”, *Mathematical Medley* 1985, disponible en http://sps.nus.edu.sg/~limchuwe/articles/serre.html). La combinación *del borde borroso y de la alta potencialidad de exactitud* es un tema fascinante para la filosofía matemática, que una aproximación analítica no puede abordar. Veremos en el *capítulo 10* cómo una fenomenología matemática más amplia (que incorpora herramientas de Peirce, Merleau-Ponty y Rota, entre otros) puede ayudar a entender mejor esos tránsitos de la creación.

establece una equivalencia entre haces algebraicos (coherentes[129]) sobre una variedad proyectiva y haces analíticos (coherentes) sobre el espacio analítico asociado a la variedad, equivalencia en donde los grupos de cohomología aparecen como invariantes[130], Serre está acotando de manera precisa el tránsito entre formas algebraicas y analíticas, con un cuidadoso control de las ósmosis u obstrucciones en juego. Cuando, al final de los años cincuenta, Serre ensaya diversas estructuras para intentar producir una "buena" cohomología para las variedades definidas sobre cuerpos finitos (procurando acercarse así a las conjeturas de Weil), y cuando surge entonces el grupo de cohomología a valores en un haz de vectores de Witt[131] –algunas de cuyas transposiciones y obstrucciones inspirarán justamente las cohomologías *l*-ádica, cristalina y *étale* de Grothendieck–, Serre está de nuevo realizando un esfuerzo ingente de precisión en el manejo y el traslado de las formas. En el entorno de la matemática *eidal* se puede vislumbrar entonces una compleja dialéctica donde se acotan tanto el movimiento de los objetos/conceptos (tránsito funtorial entre lo algebraico, lo geométrico, lo topológico), como las invarianzas relativas de la forma (cohomologías). Se trata de una honda riqueza matemática que desaparece y se *aplana* en caso de restringirse a las matemáticas elementales.

Serre resalta una honda *continuidad* en su camino creativo, allende ciertas *apariencias* de corte o de ruptura[132]: enlace de grupos de homotopía y *C*-teoría (véase nuestra nota al pie 100); ósmosis natural entre ciertas estructuras de la variable compleja (haces-cohomología en el ámbito de las funciones de varias variables complejas o de las variedades complejas proyectivas) y del álgebra (haces-cohomología en el ámbito de las funciones racionales o de las variedades algebraicas); estudio de la geometría algebraica sobre campos arbitrarios (desde clausuras algebraicas hasta campos finitos, pasando por generalizaciones de la teoría de cuerpos de clases) mediante grupos y álgebras de Lie como estructuras "madre" donde se interseca la información contextual existente. De hecho, al asomarse sobre ciertas contigüidades/continuidades entre la hipótesis de Riemann, algunos cálculos sobre formas modulares y algunos cálculos de características de subgrupos discretos del grupo lineal, Serre exclama:

---

129 La coherencia codifica una propiedad de tipo finito en los haces. Los haces coherentes provienen tanto de la geometría analítica (haz de gérmenes de funciones holomorfas), como de la geometría algebraica (haz estructural de un esquema noetheriano). Una *forma ideal común* se esconde entonces detrás de la coherencia. Se trata a su vez de un *estrato* técnico de unificación que permite una unidad aún mayor en el nivel superior de los grupos de cohomología.

130 Aprovechamos aquí (y en lo que sigue) la excelente visión de conjunto, Pilar Bayer, "Jean-Pierre Serre, Medalla Fields", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 4 (2001): 211-247. Se trata posiblemente del mejor panorama de la obra de Serre, en cualquier idioma.

131 Los vectores de Witt (1936) son sucesiones infinitas de elementos en un anillo que permiten representar de manera *natural* la suma y producto de números *p*-ádicos. Se trata, por tanto, de *formas* subyacentes escondidas detrás de ciertas representaciones incompletas. Se ve aquí cómo, aunque se consideren *solamente* algunas jerarquías de adecuación *eidal*, emergen desde ya nuevas matemáticas.

132 C.T. Chong, Y.K. Leong, "An Interview with Jean-Pierre Serre", op. cit.

"tales cuestiones no son ni teoría de grupos, ni topología, ni teoría de números: son simplemente matemáticas"[133]. La matemática avanzada contempla entonces una serie de sofisticados tránsitos técnicos sobre un *fondo conceptual continuo*, algo que, de nuevo, se pierde de vista desde cualquier perspectiva que se restrinja al fragmento (esencialmente discreto) de las matemáticas elementales.

La continuidad del saber matemático queda fuertemente resaltada gracias a la obra de **Robert Langlands** (Canadá, n. 1936). El *programa de Langlands* consiste de hecho en una extensa red de conjeturas que interrelaciona de manera precisa la teoría de números, el álgebra y el análisis, eliminando supuestos compartimientos estancos entre las subdisciplinas. El programa emerge en una larga carta (1967) del joven (y desconocido) Langlands al emimente maestro de la época, André Weil. La carta se encuentra llena de admirables conjeturas que acercan *funtorialmente* el mundo de la variable compleja y el mundo de las extensiones algebraicas *por medio* de acciones apropiadas de grupos. Los acercamientos sorpresivos[134] provienen del seguimiento de precisas elevaciones en acciones de grupos dentro del ámbito de lo *eidal*. En efecto, la intuición de Langlands surge de la *contemplación correlativa* de dos caminos ascendentes: 1. el tránsito de las formas modulares (funciones analíticas de variable compleja que respetan ciertas acciones del grupo $SL_2(\mathbf{R})$) a las formas automorfas (funciones analíticas que respetan acciones de *grupos de Lie*), pasando por las acciones intermedias del grupo Fuchsiano sobre las formas modulares de Poincaré y del grupo simpléctico sobre las formas modulares de Siegel; 2. el tránsito en la jerarquía de *L*-representaciones[135] del grupo de Galois $Gal(K^*:K)$[136].

Las correspondencias entre las *formas* de esos tránsitos llevan a enunciar la célebre *correspondencia de Langlands*: las formas automorfas asociadas al grupo lineal $GL(n:K)$ corresponden (funtorialmente) a las *L*-representaciones de dimensión *n* del grupo de Galois $Gal(K^*:K)$. La serie de *conjeturas* así conseguida[137] concreta de manera notable la continuidad

---

133 Ibíd.

134 Weil, extremadamente meticuloso, se irrita un poco con los vuelos imaginarios del joven Langlands, y ante todo manda tipografiar la interminable carta manuscrita del atrevido joven. La carta a Weil, así como mucho material adicional de (y sobre) Langlands, se encuentra en el portal disponible en red: http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/intro.html

135 Las *L*-series (Dirichlet) aparecen como objetos analíticos para representar la función ζ de Riemann. Las *L*-funciones (Artin, Hecke) son continuaciones analíticas de las *L*-series que sirven para medir la ramificación de los ideales primos en extensiones algebraicas. La construcción abstracta (elevación *eidal*) del concepto de *L*-función *integra* entonces consideraciones analíticas, algebraicas y aritméticas.

136 *K* es un campo arbitrario y $Gal(K^*:K)$ no tiene por qué ser conmutativo. El caso conmutativo había sido ya resuelto antes de Langlands en la *teoría de cuerpos de clases* (Hilbert, Takagi, Hasse, Herbrand), y, de hecho, las consideraciones en los cuerpos de clases guiaron buena parte de la intuición del matemático canadiense.

137 Vale la pena transcribir aquí el comienzo de la carta a Weil: "Mientras intentaba formular claramente la pregunta que le hice antes de la charla de Chern, me vi llevado a enunciar otras dos preguntas generales. Apreciaría su opinión sobre estas preguntas. No he tenido la posibilidad de pensar seriamente sobre estas cuestiones y no

del pensamiento matemático. De la misma manera cómo Grothendieck detecta la existencia de motivos subyacentes a las diversas apariciones de las cohomologías, Langlands detecta la existencia de *formas estructurales de tránsito* subyacentes a diversas apariciones naturales de acciones de grupo en la variable compleja y en la teoría de números. Como veremos en el *capítulo 7*, esto lleva, en la matemática contemporánea, al reconocimiento de una serie de *arquetipos*, de una serie de conceptos/estructuras que subyacen en lo profundo del *continuo* matemático y de donde se desgajan, mediante *cortes* de representación, muchas otras formas parciales que se derivan del "arquetipo".

Desde el punto de vista de los conceptos globales en juego, la correspondencia de Langlands propone una equivalencia inesperada entre ciertas estructuras *diferenciables* asociadas a una modularidad extendida (las formas automorfas asociadas al grupo lineal) y ciertas estructuras *aritméticas* asociadas a continuaciones analíticas (las L-representaciones del grupo de Galois). La cercanía profunda de lo diferenciable y lo aritmético –en el contexto acotado de la acción modular y la continuación analítica– consiste en un verdadero *descubrimiento mayor* para la matemática contemporánea. De hecho, el programa de Langlands ha impulsado muchos resultados de alta tecnicidad, entre los que se cuentan diversas pruebas de la correspondencia, para todo n y para casos específicos del campo K en consideración: 1. cuerpos de series formales sobre campos finitos (Laumon, Rapoport, Stuhler 1993); 2. cuerpos p-ádicos (Harris, Taylor 1998); 3. cuerpos de funciones racionales sobre curvas definidas sobre campos finitos (Lafforgue 2000, trabajo que le valió la Medalla Fields 2002).

No obstante, una *obstrucción formidable* en el programa consiste, por el momento, en abordar los campos "naturales" de característica cero ($\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$), para cuyo estudio no parece haberse construido aún el instrumentario matemático indispensable. Acá, la técnica se enfrenta a uno de esos quiebres conceptuales paradigmáticos que pueden ser de sumo interés para la filosofía de la matemática. Por un lado, el salto a lo analítico (L-funciones) permite entender mejor algunos fragmentos de la teoría de números; pero, por otro lado, una vez efectuado el salto, las obstrucciones mayores se encuentran en el regreso a lo que *deberían* ser las estructurales naturales de lo analítico (campos de característica cero). Nos encontramos así ante nuevas obstrucciones en el tránsito –cuidadosamente sostenidas, en el ámbito del programa de Langlands, por una sofisticada *teoría* de los transvases estructurales de las formas– que revelan una vez más la presencia incesante de la "aporía fundadora de las matemáticas" según Thom, aquella *contradicción* inherente entre lo discreto y lo continuo que *impulsa* a la disciplina. *En el fondo*, nada puede estar entonces más alejado

le preguntaría si no fuese como continuación de nuestra conversación casual. Espero que las trate con la tolerancia que requieren en este momento". La combinación de informalidad (supuesta no seriedad, conversación casual, tolerancia) y de profundidad (pues la carta de diecisiete páginas es todo menos ligera o poco seria) debe recordarnos las observaciones de Serre acerca del pensamiento matemático "a media noche".

del entendimiento de la invención matemática que una postura filosófica que intente calcar la analítica conjuntística, y que pretenda *eliminar* las contradicciones inevitables del hacer matemático o *reducir* la dialéctica continuo/discreto, entre otras labores de "asepsia". Al acercarnos a las obras de algunos grandes matemáticos contemporáneos, vemos cómo la labor del matemático "real" (en el sentido de Corfield) apunta *exactamente* a una dirección opuesta: *multiplicar* la dialéctica y *contaminar* los espacios del saber matemático. Se trata de una labor catapultadora del conocimiento, que la filosofía de la matemática debe empezar a incluir en su agenda.

Dados un grupo algebraico[138] G y una L-función, se puede construir un nuevo grupo ^{L}G (grupo de Langlands) que combina el grupo de Galois absoluto sobre el campo subyacente a G y un grupo de Lie complejo asociado a L; se trata de un *mixto*, en el pleno sentido lautmaniano, que ayuda a controlar la teoría de representaciones de G. Dentro de ese marco, algunos de los tránsitos subyacentes en el programa de Langlands corresponden al *hecho funtorial* (plausible, correcto en casos particulares y no demostrado en general) de que todo morfismo $^{L}G \rightarrow {}^{L}G'$ *proviene* de un morfismo entre las formas automorfas asociadas, que se comporte bien en cada estrato de representación p-ádico, *para casi todo* p[139]. Estamos aquí ante una situación recurrente en las matemáticas avanzadas, que *no puede ser contemplable* en contextos matemáticos de menor nivel de complejidad: una situación donde las formas generales del conocimiento (*universalidad*, funtorialidad) *y* los cálculos acotados subyacentes[140] (*particularidad*, objetos diofantinos) dependen de una compleja jerarquía *intermedia* que *fuerza* a estructurar tanto el tránsito genérico (hacia lo alto), como la obstrucción específica (hacia lo bajo).

Langlands resume en una entrevista su percepción de las matemáticas:

> Amo las grandes teorías, sobre todo en las matemáticas y en los dominios vecinos. Me enamoré de algunas, pero sin realmente captar su alcance, cuando era aún estudiante. (...) Lo que amo es el *lado romántico* de las matemáticas. Hay problemas, aún grandes problemas, que nadie sabe cómo abordar. Se intenta entonces encontrar un *sendero que lleve a la cima* o que permita acercarse a ella. (...) Amo tener la impresión de estar ante un continente virgen. Amo los problemas cuya solución exige teorías inéditas e

138 Un grupo algebraico es una variedad algebraica que posee además una estructura de grupo. Ejemplos de grupos algebraicos son los grupos finitos, los grupos lineales *GL(n)*, las curvas elípticas.

139 Véase Robert Langlands, "Where Stands Functoriality Today", en: T.N. Bailey & A.W. Knapp, *Representation Theory and Automorphic Forms*, Proc. Symp. Pure Math. 61, Providence: American Mathematical Society, 1997, pp. 457-471.

140 No podemos evocar aquí esa enorme *riqueza concreta* de los cálculos, pero basta con imaginar que éstos incluyen toda la enorme tradición aritmética alemana del siglo XIX y comienzos del XX (Jacobi, Dirichlet, Eisenstein, Kummer, Hilbert, Hecke, Artin, Hasse, etc.).

insospechadas. En otros términos, amo las matemáticas que *llevan a soñar*[141].

El ascenso a las cumbres de lo *eidal* permite así visiones privilegiadas, como aquella, a los 31 años, de la cual Langlands se admira retrospectivamente: "que no obstante haya llegado a alguna parte me parece siempre un milagro (...) que haya visto tanto de un solo golpe no cesará nunca, creo, de asombrarme"[142]. Se trata de un asombro sincero, ligado en cierta medida a la maravilla del descubrimiento ("continente virgen"), pero puede observarse desde ya (aunque precisaremos ésto en los *capítulos 10 y 11*) que, en la matemática contemporánea, muchos grandes creadores alcanzan a elevarse a la cima gracias precisamente a su capacidad de *transitar correlativamente* en el mundo de lo *eidal*, aprovechando de manera sistemática polaridades, jerarquías, invariantes relativos y correspondencias estructurales intermedias. Se trata de una *dinámica* del mundo matemático completamente diferente de aquella que se puede dar en las matemáticas elementales –cuyo bajo umbral de complejidad no permite la emergencia de las transformaciones recién señaladas– o de aquella que se ha discutido usualmente en la filosofía analítica de las matemáticas, cuyo desgajamiento de los objetos matemáticos, en procura de un fundamento estático último que los sostenga, no permite cualificar sus incesantes torsiones e impide entonces acercarse a la *especificidad transitoria* de las matemáticas (en tres niveles: fenomenológico, ontológico y epistemológico, como veremos posteriormente).

Un revelador comentario de Langlands, acerca de la diferencia entre el Teorema de Taniyama-Shimura[143] y el Teorema de Fermat, muestra la importancia del pensamiento matemático atento a estructuras *eidales genéricas*: "El Teorema de Fermat es una consecuencia inesperada de otro teorema (Taniyama-Shimura-Weil). Este último pertenece a un marco coherente, en el que creo porque corresponde a un *orden* que estoy acostumbrado a percibir en la teoría de números, y que constituye para mí su *belleza*. Por el contrario, según mi intuición o mi imaginación, el Teorema de Fermat podría haber resultado falso sin que ese orden se

---

141 Stéphane Durand, "Robert Langlands. Un explorateur de l'abstrait", *Québec Science* 2000, disponible en http://www.crm.umontreal.ca/math2000-1/pub/langlands.html (nuestras cursivas). Volveremos sobre el imprescindible *lado romántico* de las matemáticas en nuestros capítulos finales.

142 Respuesta a la Medalla de Oro de la Academia Francesa de Ciencias (2000), disponible en http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/misc/gror.ps.

143 La conjetura de Taniyama-Shimura (1955) sugería la equivalencia (módulo *L*-series) de las curvas elípticas con las formas modulares. Frey (1985) conjeturó que una solución no trivial de tipo Fermat ($x^n + y^n = z^n$) daría lugar a una curva elíptica no modular ("curva de Frey"). Ribet demostró (1986) la conjetura de Frey, estableciendo así la implicación No (Fermat) $\Rightarrow$ No (Taniyama-Shimura), o, lo que es lo mismo, Taniyama-Shimura $\Rightarrow$ Fermat. Wiles (1993-94) demostró la conjetura de Taniyama-Shimura para curvas elípticas semiestables (entre las cuales aparece la curva de Fermat), demostrando así el Teorema de Fermat. La prueba plena de Taniyama-Shimura, para todas las curvas elípticas, fue finalmente obtenida en 1999 (Breuil, Conrad, Diamond, Taylor).

hubiese perturbado"[144]. Contrapesos generales, oscilaciones pendulares, contrapuntos dentro de un orden abstracto, armonías estéticas escondidas guían entonces al *vidente teórico*, mientras que la particularidad del caso concreto puede llegar a distraerlo. En el *equilibrio* entre la más amplia universalidad abstracta y la más acotada particularidad concreta, es decir, en el amplio registro de las *mediaciones*, es donde emerge con toda su fuerza la inventividad matemática, aureolada de "*orden y belleza*, lujo, calma y voluptuosidad"[145].

William Lawvere (Estados Unidos, n. 1937) ha sido uno de los principales propulsores de una amplia jerarquía de mediaciones, en el ámbito general de la teoría de categorías. Desde su tesis doctoral[146], Lawvere ha insistido consistentemente en pensar diferente, y ha logrado situarse en un *revés* conceptual en el que priman lo sintético y lo global, alejándose de las usuales aproximaciones analíticas locales. El pensamiento de Lawvere combina varias estrategias tendientes a captar de una manera plena el *movimiento* de los conceptos matemáticos, siguiendo así los lineamientos de la obra de Grothendieck. Ya sea "invirtiendo el antiguo programa teórico de modelar la variación dentro de una constancia eterna", ya sea rompiendo la "contradicción *irresoluble* (...) que opone metafísicamente puntos y vecindades", ya sea construyendo la "teoría de topos que permite un *back-and-forth* entre conjuntos constantes y variables"[147], Lawvere busca edificar una concepción dinámica de las matemáticas con la cual capturar, tanto el continuo devenir del mundo físico[148], como el continuo plegarse del tinglado de relaciones lanzado sobre el mundo. Como veremos, el proceder de Lawvere consiste en *elevar* dentro de lo *eidal* una sofisticada red de vaivenes y oposiciones entre conceptos, cálculos y modelos, que se elonga tanto verticalmente (jerárquicamente) como horizontalmente (antitéticamente). La comprensión sintética de esa red, "bajo la guía de esa forma de dialéctica objetiva conocida como teoría de categorías"[149], es un aporte fundamental al pensamiento contemporáneo, aún en ciernes de trascender el estricto ámbito matemático de su origen.

144 Durand, "Robert Langlands...", op. cit. (nuestras cursivas).

145 Charles Baudelaire, "L'invitation au voyage", *Fleurs du mal* (1857).

146 F.W. Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories* (Columbia, New York, 1963) [resumen en *Proc. Nat. Acad. Sci.* 50 (1963): 869-872]. Lawvere fue alumno directo de Eilenberg y Mac Lane, los creadores de la teoría de categorías (S. Eilenberg, S. Mac Lane, "General theory of natural equivalences", *Trans. Amer. Math. Soc.* 58 (1945): 231-294).

147 F. William Lawvere, "Continuously variable sets; algebraic geometry = geometric logic", en: *Proceedings of the Logic Colloquium 1973*, Amsterdam: North-Holland, 1975, pp. 135-156.

148 Lawvere fue inicialmente alumno de Truesdell en mecánica continua; aunque luego se dirigió a los fundamentos categóricos de la matemática y la lógica, siempre ha estado impulsando la conveniencia de herramientas categóricas cercanas al tránsito y al flujo (conjuntos variables y haces, allende la estática de lo puntual), más adecuadas para entender las dinámicas del mundo físico.

149 F. William Lawvere, "Introduction", en: *Proceedings of the Halifax Conference on Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, New York: Springer, 1972, pp. 1-12, cita p. 1.

Uno de los escasos matemáticos contemporáneos de altura que se han atrevido a interpolar dentro de sus escritos referencias vagas y no disciplinarias[150] como fuente de posteriores precisiones técnicas, Lawvere ha sabido construir un difícil equilibrio entre el *vidente* asomado a los abismos ("calibrando en cierta manera cuáles direcciones de la investigación son verosímilmente relevantes"[151]) y el "escalador" que asegura cada paso en su ascensión (enfrentándose con algunos de los mayores retos técnicos de la época). En un notable artículo sobre el "futuro" de la teoría de categorías[152], Lawvere caracteriza la teoría de categorías como

> la primera en capturar en forma reproducible una incesante contradicción de la práctica matemática: fijar un objeto dado con precisión, más que en cualquier otra ciencia, para construir, calcular y deducir; y, sin embargo, constantemente transformarlo en otros objetos.[153]

La capacidad de la teoría de categorías de *axiomatizar* con gran nitidez[154] el *vaivén* fundamental entre consideraciones estáticas (estados, puntos, objetos) y dinámicas (procesos, vecindades, morfismos) es una de las razones profundas de su éxito. La teoría presenta un permanente *back-and-forth* entre las tres dimensiones básicas de la semiótica, enfatizando traslados y correlaciones pragmáticas (comparaciones funtoriales, *adjunciones*[155]) sobre aspectos semánticos (clases canónicas de modelos) o sintácticos (ordenamientos de tipos). En la visión de Lawvere, se oponen –y crecen a partir de esa oposición– dos clases de categorías que corresponden al "Ser" y al "Devenir", entre las cuales vibra una "unidad-e-identidad-de-opuestos"[156] que da lugar a notables conjeturas matemáticas, en un terreno intermedio entre el ascenso a lo general –"desde abajo, desde el espacio real"– y el descenso a lo particular –"desde arriba, desde álgebras clasificadoras abstractas"[157].

Un funtor de "descenso" envía una categoría dada en una más pequeña y, en un doble vaivén asociado (dos adjunciones, véase *figura 8*), aparecen dos *esqueletos* contrapuestos del Ser (en "positivo" y en

150 Incluyendo menciones, frontalmente provocativas, a Engels, Lenin o Mao.
151 F. William Lawvere, "Adjointness in Foundations", *Dialectica* 23 (1969): 281-296, cita p. 281.
152 F. William Lawvere, "Some thoughts on the future of Category Theory", en: *Proceedings of the Como Meeting on Category Theory*, New York: Springer, 1991, pp. 1-13.
153 Ibíd., p. 1.
154 Lawvere habla de "cristalinos descubrimientos filosóficos que aún impulsan nuestro campo de estudio", ibíd.
155 Una adjunción categórica generaliza una residuación en un conjunto ordenado (es decir, un par de morfismos f, g tales que $fx \leq y$ ssi $y \leq gx$). La adjunción consiste en un par de funtores F, G tales que $Mor(FX,Y) \approx Mor(X,GY)$ (isomorfismo natural). Las residuaciones recorren toda el álgebra y, en particular, en el álgebra de la lógica, dan lugar a la implicación y el existencial. Las adjunciones, ligadas a objetos *libres*, aparecen en forma aún más ubicua en la teoría de categorías.
156 Ibíd., p. 2.
157 Ibíd., p. 12.

“negativo”)[158] como imágenes extremas del Devenir. El *back-and-forth* –la ida y el regreso– *libera* los ropajes de la categoría: lo esquelético surge como una filtración estática (dentro del ser) *después* de haberse sumido en un fluido dinámico (dentro del devenir). Los esqueletos (positivo y negativo), junto con el funtor de descenso, conforman una “unidad-e-identidad-de-opuestos”, donde lo que aparece como contradictoriamente fusionado en un *nivel* puede ser separado y distinguido en otro. El descenso al abismo se encuentra perfectamente controlado por una estrategia jerárquica –niveles y contextos, es decir, funtores y categorías– muy cercana al pragmatismo peirceano.

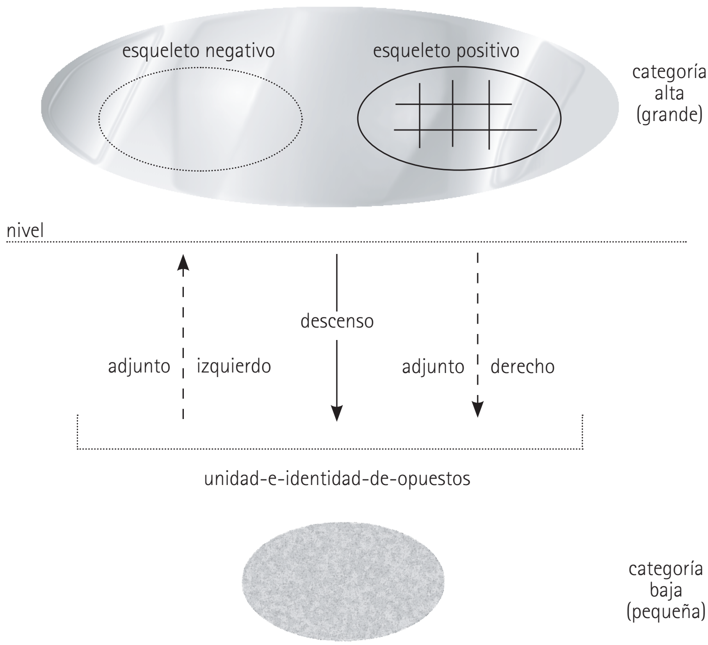

Figura 8. *“Unidad-e-identidad-de-opuestos”. Descensos, niveles y esqueletos según Lawvere*

Los ejemplos de Lawvere recorren multitud de campos de la matemática moderna y contemporánea: topología general y algebraica, geometría algebraica y diferencial, estructuras algebraicas abstractas –categorías, retículos, anillos–, lógicas no clásicas, análisis funcional, física matemática, etc. En el marco de esa colección de situaciones concretas, Lawvere ejerce, sin embargo, un incesante ejercicio *eidal*: al seguir una meticulosa estrategia de descenso y ascenso, combinada con una dialéctica de contraposiciones, *emerge* el conocimiento. En palabras de Lawvere, “el

158 Ibíd., p. 7.

uso explícito de la unidad y cohesividad de las matemáticas enciende la chispa de muchos procesos particulares en los que la ignorancia se torna en conocimiento”[159]. Los procesos de vaivén, la progresiva liberación[160] de los objetos, la contraposición de esqueletos opuestos permiten tomar distancia, decantar, mirar con *otros ojos*.

La unión entre lo estático y lo dinámico preconizada por Novalis se realiza con suma originalidad en la teoría de categorías. Una combinatoria *natural* de niveles permite representar un mismo objeto, a la vez, como fijo (en una categoría dada) o como variable (a lo largo de sus transformaciones funtoriales). El aforismo de Schlegel que liga universalidad y transformación –“la vida del espíritu universal es una cadena ininterrumpida de revoluciones interiores”[161], otra forma más de la “Gran Cadena del Ser” y del infinito “Arbol del Conocimiento” estudiados por Lovejoy– encarna con precisa sofisticación en la teoría de categorías. Los universales de la teoría son siempre universales dinámicos, nunca rigidizados en un Absoluto fijo. Todo el instrumental categórico –composición, morfismos, funtores, transformaciones naturales, croquis, límites, adjunciones, haces, esquemas, etc.– se convierte en un arsenal técnico de enorme potencia que, insospechadamente, revitaliza la dialéctica romántica entre el Ser y el Devenir. No estamos aquí lejos entonces del “lado romántico” de las matemáticas que preconizaba Langlands.

Dentro de este marco dinámico muy general, los *transvases concretos de las formas* se manifiestan de múltiples maneras en la obra de Lawvere. Un argumento de punto fijo, admirablemente sencillo, en categorías cartesianas cerradas permite enlazar el teorema de Cantor ($card(X)<card(\wp X)$), el teorema de incompletitud de Gödel, la teoría de la satisfacibilidad de Tarski y la obtención de puntos fijos en retículos completos[162]. Una comprensión fina de ciertas propiedades de exactitud en los topos permite entender los cuantificadores como adjuntos, describir el comportamiento lógico de los haces y lanzar un programa de geometrización de la lógica en donde el intuicionismo emerge, para sorpresa general, en lugar central[163]. Una

---

159 Ibíd., p. 2.

160 Un *objeto libre* en una categoría posee una definición técnica precisa, pero puede verse como un objeto universal –descarnado y esquelético– con una asombrosa ductilidad proyectiva: capaz de proyectar, de manera única, *toda* su estructura formal sobre cualquier otro objeto de la categoría que *sólo* posea cimientos similares. Los objetos libres permiten un notable paso formal de la parte al todo, en situaciones matemáticas que involucren ricas posibilidades de tránsito (que no siempre se dan puesto que no toda categoría posee objetos libres). Dentro de este marco, una *adjunción* se puede ver como un proceso genérico, uniforme y cohesivo de construcción de objetos libres.

161 Friedrich Schlegel, “Fragmentos” (*circa* 1800), en: Javier Arnaldo (comp.), *Fragmentos para una teoría romántica del arte*, Madrid: Tecnos, 1987, p. 227.

162 F. William Lawvere, “Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories”, en: *Lecture Notes in Mathematics* 92, New York: Springer, 1969, pp. 134-145.

163 F. William Lawvere, “Quantifiers and Sheaves”, en: *Actes du Congrès international des mathématiciens 1970*, París: Gauthier-Villars, 1971, pp. 329-334. Lawvere señala explícitamente que “en un sentido, la lógica es un caso especial de la geometría” (p. 329). Es el anuncio de una creciente geometrización de la lógica, algunas de cuyas manifestaciones revisaremos en el *capítulo 7* (Freyd, Zilber), y que forma parte en realidad de una renovada *geometrización de la matemática contemporánea*, como lo

axiomatización elemental de los topos (alrededor del clasificador de subobjetos) permite reentender las topologías como operadores modales, abstraer las propiedades de las topologías de Grothendieck mediante operadores de clausura *j* sobre el clasificador de subobjetos, y definir una noción abstracta de haz con respecto a esas "topologías" *j*[164]. Son todos ejemplos de cómo siguen *contaminándose* los diversos subcampos de la matemática, y de cómo ciertas subespecializaciones de la forma *transitan simultáneamente* en la lógica, la geometría o el álgebra. De hecho, nos encontramos así ante un verdadero quiebre óntico/epistémico –emergente en la matemática moderna y plenamente definido en la matemática contemporánea– donde las antiguas subdivisiones de la disciplina tienden a *desaparecer*.

La obra de **Saharon Shelah** (Israel, n. 1945) otorga nuevos y profundos argumentos técnicos a la comprensión de una matemática fuertemente *estratificada*, imbuida de múltiples tensiones *transversales*, y atenta al estudio de las *limitantes estructurales* de la estratificación, tanto en sus niveles horizontales, como a lo largo de su esqueleto vertical. Yendo mucho más allá de los teoremas de incompletitud de Gödel (acerca de las limitantes *deductivas* de teorías cuyo umbral de complejidad supera la aritmética de Peano), los *teoremas de no estructura* (1980-90) de Shelah[165] develan las limitantes *semánticas* de clases naturales de modelos en las matemáticas avanzadas. Los resultados de Shelah revelan una inesperada *polarización* en el estudio de las clases de modelos de una teoría clásica *T*; su teorema de la "brecha" ("*Main Gap*") muestra que el número de modelos no isomorfos (de un tamaño dado) de *T* se enfrenta a una cortante alternativa: *o* estalla literalmente, alcanzando el máximo posible de modelos, *o*, en cambio, resulta ser perfectamente controlable. No hay lugar para un semicontrol o para una semiexplosión: o la clase de modelos de *T* no cuenta con ninguna estructura –todos los posibles modelos se dan: todo lo que *posiblemente* es, también *actualmente* es–, o la clase puede ser plenamente estructurada –todo lo que actualmente es, también lo es en forma "coordinada" mediante finas escalas de invariantes–. De hecho, en el fondo, la consecución de una *teoría general de la dimensión* (finos invariantes para el caso estructurado) impulsa las ideas más originales de Shelah. En particular, su "teoría de la excelencia" –sostén de la parte difícil de la prueba del *Main Gap*, que tardó diez años en ser terminada– requiere una serie de interacciones

---

hemos indicado en el *capítulo 2*. Puede anotarse que en el Congreso de Niza, donde Lawvere plantea su programa, es donde Grothendieck anuncia su prematuro abandono del mundo matemático. Sin observarse claramente en ese momento, las ideas del francés reencarnaban ya con nueva fuerza en el norteamericano.

164 F. William Lawvere, "Introduction", en: *Lecture Notes in Mathematics* 274, New York: Springer, 1972, pp. 1-12. Lawvere y Tierney axiomatizan los topos (provenientes de la escuela de Grothendieck) en términos elementales, es decir, sin requerir condiciones de infinitud o de elección. Un clasificador de subobjetos generaliza la idea de conjunto potencia, y permite gobernar las *sub*-construcciones de la matemática conjuntística usual mediante el comportamiento universal de los morfismos en juego.

165 Trabajos reunidos en el monumental (xxxiv + 705 pp.), Saharon Shelah, *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, Amsterdam: North-Holland, 1990.

“algebraicas” en dimensiones finitas arbitrariamente altas, que trasciende con mucho las usuales interacciones en dimensión dos que aparecen en las pruebas de independencia en la geometría algebraica tradicional[166]. Nos encontramos así ante otra situación más en las matemáticas avanzadas, donde un salto de complejidad da lugar a nuevas matemáticas *sin reflejos* en los estratos inferiores.

Después de detectar la presencia *genérica* de la brecha en el universo conjuntista, la ingente labor de Shelah y de su equipo[167] se concentra entonces en describir múltiples condiciones observables *concretas* para poder detectar si una teoría arbitraria puede *clasificarse* como de estructura o de no estructura. Las clases de modelos de una tal teoría deambulan, en principio, entre dos extremos: proximidad a un teorema de categoricidad tipo Morley, donde los modelos resultan isomorfos por estratos[168], o liberación de cualquier restricción estructural. Una primera dicotomía para clasificar clases de modelos distingue teorías *estables* e inestables. El hondo sentido matemático de las teorías estables proviene de la estructura $\boldsymbol{C}$ de los números complejos, con *suma y multiplicación*, y de la geometría algebraica que allí puede realizarse; las nociones de dimensión y de algebraicidad corrientes se extienden a las teorías estables, y pueden usarse como invariantes lógico-algebraicos naturales para “coordinar” los modelos de esas teorías. Así mismo, las teorías inestables son teorías en las que ciertos órdenes genéricos pueden ser definibles[169]; en ese caso,

166 Agradezco a Andrés Villaveces estas precisiones. Según Villaveces (comunicación personal), “hay una cantidad de estructuras «a la espera de ser descubiertas» en geometría, en álgebra, que *requieren* que la interacción algebraica dé cuenta de todos esos diagramas en dimensiones altas. [...] Ya en teoría de grupos están empezando a hacer amalgamas tridimensionales. Son muy difíciles, y corresponden a propiedades realmente más profundas de teoría de grupos que la mayoría de las tradicionales. [...] Es un poco como si en geometría hubiéramos trabajado hasta ahora con una «proyección bidimensional» de fenómenos que pueden ser más naturales si los contemplamos en su verdadera dimensión”.

167 El carisma de Shelah ha dado lugar a un verdadero taller de lógica distribuido en numerosos países. La obra de Shelah y de sus colaboradores se acerca a un millar de artículos, algo del todo inverosímil en el mundo de las matemáticas. Por la profundidad de sus ideas generales, por su virtuosismo técnico, por la tenacidad de su trabajo cotidiano, por su influencia en la comunidad, Shelah puede verse fácilmente como el mayor lógico vivo a comienzos del siglo XXI.

168 El Teorema de Morley (1965) afirma que una teoría enumerable en primer orden, que es categórica en un cardinal κ no enumerable (es decir, tal que todos sus modelos de tamaño κ son isomorfos), lo es también en *todo* cardinal mayor que κ. Este es el resultado más fuerte posible de “colapso” en el infinito para teorías de primer orden (colapso por estratos), pues en cambio, de un estrato a otro, lejos de colapsar, los modelos se multiplican debido a las propiedades de la lógica de primer orden (compacidad, Löwenheim-Skolem).

169 Estamos ante una situación contraria a aquella de $\mathbf{C}$, donde no puede definirse un orden congruente con las operaciones. La inexistencia de un orden en los complejos, vista durante décadas como una limitante importante dentro de la construcción arquitectónica de los conjuntos de números, resulta ser ahora en cambio una fortaleza (razón de estabilidad). La *pendularidad* del entendimiento matemático es aquí patente. Ninguna descripción de la *riqueza óntica* de $\mathbf{C}$ debería poder dejar de lado esta fundamental oscilación. No obstante, el movimiento pendular no sólo no es estudiado en la filosofía analítica de la matemática: ni siquiera es detectado como existente! Éste es un ejemplo, entre muchos otros de las matemáticas avanzadas, que nos *fuerza* a cambiar de óptica filosófica, si nos disponemos *realmente* a aceptar los avances de la disciplina.

las clases de modelos tienden a desagregarse y la diversidad explota. Un ejemplo actualmente en pleno estudio (y sobre el cual volveremos en el *capítulo 7*, alrededor de Zilber) es la estructura de los complejos, con suma, multiplicación y *exponenciación* añadida; la exponencial compleja introduce de hecho una sofisticada jerarquía de submodelos analíticos que queda por fuera del control de la lógica de primer orden, y la teoría se torna profundamente inestable[170].

Más allá de la dicotomía estable/inestable, el programa de Shelah aborda la problemática de describir y estudiar otras múltiples *líneas divisorias* que acoten el *Main Gap*, con importante *contenido matemático* (y no solo lógico) de cada lado de la división. Una línea divisoria robusta es la dicotomía superestable + noDOP + noOTOP / no superstable o DOP o OTOP[171], con teoremas fuertes de estructura del lado superestable + noDOP + noOTOP, en los cuales los modelos pueden ser analizables mediante *árboles* de modelos *contables*. Vemos entonces que una *polaridad eidal* general puede llegar a encarnar en múltiples polaridades concretas.

En una prospección sobre el futuro de la teoría de conjuntos[172], Shelah considera que las principales fuentes de interés para el desarrollo de la teoría radican en su belleza (calificada con "9 puntos"), su generalidad (6 puntos), sus pruebas concretas (5 puntos), su riqueza de desarrollos internos (4 puntos)[173], y apoya esta polémica visión al añadir: "siento, exagerando algo, que la belleza es para la eternidad, mientras que los valores filosóficos siguen las modas"[174]. Para Shelah, la belleza radica en "una estructura donde definiciones, teoremas y pruebas adquieren su lugar en la armonía"[175]. *Aun cuando* muchos de los teoremas mayores de Shelah exhiben, analizan y sintetizan el comportamiento no armónico y no estructurado de ciertas clases de modelos, debe observarse que, *en el todo de su concepción*, existe en cambio un contrapunto pendular entre lo estructurado y lo falto de estructura, y esa oscilación es *en sí misma* profundamente armónica. Los transvases u obstrucciones de las formas, con equilibrios globales y con

---

170 Para complementos y precisiones, véase la excelente visión de conjunto, Andrés Villaveces, "La tensión entre teoría de modelos y análisis matemático: estabilidad y la exponencial compleja", *Boletín de Matemáticas* Nueva Serie XI (2004): 95-108.

171 OTOP, "Omitting Types Order Property", indica que cierto orden no definible por fórmulas en la lógica de primer orden, sí lo es mediante omisión de tipos (en la lógica $L_{\omega_1\omega}$, de poder más expresivo). DOP, "Dimensional Order Property", es otra forma de expresión de un *orden oculto* a los ojos de la lógica de primer orden. Debo a Andrés Villaveces esta información.

172 Saharon Shelah, "The Future of Set Theory" (2002), http://arxiv.org/pdf/math.LO/0211397.pdf.

173 Shelah completa la lista con otras fuentes menores de interés (en orden decreciente): aplicaciones, historia, "deporte", fundamentos, filosofía.

174 Ibíd., p. 2. El que el *mayor exponente vivo de la teoría de conjuntos* deje de lado el supuesto valor filosófico de los conjuntos debe ayudar a que aquellos filósofos que solo ven "filosofía de la matemática" en la filosofía de la teoría de conjuntos cuestionen seriamente su perspectiva.

175 Ibíd. Como ejemplos de belleza, Shelah propone la teoría de Galois (y "más exactamente lo que está en el libro de Birkhoff-MacLane") y el teorema de Morley (con su prueba). Obsérvese cómo un gran matemático insiste en la *forma* de las pruebas y en su *exposición*: entra de nuevo en juego la fundamental pertinencia del *estilo* en matemáticas.

incesantes tensiones locales, gobiernan una vez más los lineamientos de una obra determinante en las matemáticas contemporáneas.

Como sucede a menudo a los grandes creadores matemáticos, los avances en una dirección de su pensamiento se contraponen con avances inesperados en una dirección *opuesta*. Después de convertirse en un especialista en resultados de *consistencia relativa*[176] en teoría de conjuntos, y sobre todo después de demostrar la muy difícil independencia del problema de Whitehead[177], Shelah *gira* hacia una nueva comprensión de las aproximaciones en el infinito, con un ambicioso programa de aritmética cardinal[178] en el que propone *rediseñar invariantes* adecuados para las operaciones. En efecto, si la gran *obstrucción* de la aritmética cardinal resulta ser la exponenciación cardinal –debido al comportamiento "salvaje" ("wild") de 2^κ para κ cardinal infinito (resultados de independencia de Cohen, 1963)– Shelah propone buscar entonces un *esqueleto robusto* alternativo para las operaciones infinitarias. Shelah encuentra el sostén de ese esqueleto en su teoría *pcf* (iniciales de "*p*ossible *cof*inalities"), donde introduce una red de *controles algebraicos moderados*[179] para las cofinalidades cardinales[180], y descubre que, más allá del comportamiento errático o caótico de la exponenciación, subyace un comportamiento *regular* de ciertos productos reducidos con los cuales pueden aproximarse las colas altas de los cardinales. Nos encontramos de nuevo aquí ante la construcción de una jerarquía intermedia que permite adecuar relativamente el tránsito y hallar sus invariantes apropiados.

Una suerte de correlación [*pcf*/cardinales ≡ topología algebraica/topología] se desprende de los trabajos de Shelah. De hecho, la búsqueda de un esqueleto robusto (cofinalidades) y de una calculatoria algebraica moderada (productos reducidos) en la teoría de cardinales singulares

---

176 Dados un enunciado φ y una subteoría T de la teoría de conjuntos ZF, φ es *relativamente* consistente con T si $Con(T) \Rightarrow Con(T+\varphi)$ (donde $Con(\Sigma)$ significa que la teoría es consistente, es decir, que Σ no deduce una contradicción). φ es *independiente* de T si tanto φ como $\neg\varphi$ son relativamente consistentes con T. Gödel (1938) inicia esta línea de estudio, con la consistencia relativa de la hipótesis del continuo con respecto a ZF. Por otros caminos, las estrategias relativas entran luego a convertirse, como hemos visto, en una de las líneas de acción mayores en Grothendieck.

177 El problema de Whitehead (1950) pretendía caracterizar un grupo abeliano *libre* A mediante una condición sobre su comportamiento contextual (condición A residual: para todo morfismo g sobre el grupo A, con núcleo Z, existe una sección s tal que $gs=id_A$). Shelah demostró que, para grupos abelianos, la conjetura θ : (A residual $\Rightarrow$ A libre) era *independiente* de la teoría de conjuntos ZF, pues, por un lado, $V=L$ deducía θ (de donde $Con(ZF+\theta)$), y, por otro lado, $MA + \neg HC$ deducía $\neg\theta$ (de donde $Con(ZF+\neg\theta)$).

178 Saharon Shelah, *Proper and Improper Forcing*, Amsterdam: North Holland, 1992. Saharon Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Oxford: Oxford University Press, 1994.

179 La estrategia de una matemática "moderada", que deje de lado ciertas *singularidades* (como algunos contraejemplos artificiales de la topología general, basados en el axioma de elección, o como la exponenciación cardinal), se retrotrae a Grothendieck (ver nota 68).

180 Para un cardinal κ, su *cofinalidad* $co(\kappa)$ se define como el mínimo cardinal de los subconjuntos cofinales en (el orden de) κ. Un cardinal es *regular* si es igual a su cofinalidad (ejemplo: $\aleph_{\alpha+1}$) y es *singular* en caso contrario (ejemplo: $\aleph_\omega$). La teoría *pcf* ayuda a controlar los subconjuntos de un cardinal singular mediante cofinalidades, algo que no puede lograrse mediante exponenciales.

corresponde a la idea de buscar invariantes algebraicos naturales (homotopías, homologías) para la topología. Se cierra así uno de los ciclos que abordamos en este capítulo, al empezar por los trabajos de Serre en homotopía de las esferas[181]. Si los transvases permanentes de las formas han sido el *motivo* fundamental del capítulo, hemos podido contemplar también una rica multiplicidad de *modulaciones* concretas en donde encarna muy diversamente el motivo. La mayoría de estos tránsitos han ocurrido en el mundo de lo *eidal*, en el amplio espacio del imaginario matemático.

Veremos en el próximo capítulo cómo, a su vez, esos ascensos de la inventividad matemática logran *descender* de nuevo al mundo físico, de las maneras más desconcertantes posibles. En efecto, en los últimos treinta años, la física matemática se ha visto imbuida por una extraordinaria cohorte de métodos abstractos de la alta matemática –en gran medida, bajo una renovada mirada de la obra de Grothendieck gracias a la escuela rusa–, cuyas consecuencias técnicas empiezan a vislumbrarse solo ahora, y cuyas consecuencias filosóficas pueden llegar a ser completamente explosivas.

181 El ciclo se cierra aún más al observar (Villaveces, comunicación personal) el paralelo [*pcf*/cardinales ≡ esquemas/variedades]. En efecto, en *pcf* se *localiza* la aritmética cardinal, al controlar cofinalidades alrededor de cardinales fijos y luego “pegar” la información, de manera similar a cómo los esquemas ayudan a localizar la aritmética de las variedades, al controlar anillos locales sobre primos y luego “pegar” la información. Volveremos en la tercera parte de este ensayo sobre la *importancia crucial de los haces* –subyacentes a procesos de localización y pegamiento, o, más generalmente, de diferenciación y reintegración– para intentar captar *intrínsecamente* (y no sólo diacrónicamente, en el entorno 1940-50) el paso de las matemáticas modernas a las matemáticas contemporáneas.

Capítulo 6

Matemática *quidditaL*. Atiyah, Lax, Connes, Kontsevich

Desde sus inicios, la matemática ha estado muy cerca de la física. La observación de los fenómenos naturales ha intentado ayudarse del aparataje matemático en cada momento de la historia. La matemática, descrita desde siempre como el *lenguaje universal* de las ciencias, pasa a entenderse –en los comienzos de la matemática moderna, gracias al vuelco espectacular de Riemann– como una suerte de *engranaje estructural* para las ciencias. Lejos de reducirse a un mero lenguaje, cuya conveniencia ayudaría solo a develar lo que *otras* ciencias descubrirían, en la visión de Riemann las matemáticas constituyen de hecho la disciplina que permite codificar las estructuras profundas que subyacen en el mundo natural. La situación se ha complejizado aún más en la última mitad del siglo XX, con algunos de los más formidables avances de la matemática contemporánea. Como veremos, ciertas estructuras aritmético-combinatorias (grupo de Grothendieck-Teichmüller) pueden llegar a gobernar algunas correlaciones entre las constantes universales de la física (velocidad de la luz, constante de Planck, constante gravitacional), mientras que, inversamente, ciertas teorías matemáticas provenientes de la mecánica cuántica (geometría no conmutativa) pueden ayudar a resolver difíciles problemas aritméticos (hipótesis de Riemann). Se trata de resultados *absolutamente sorprendentes*, que acercan las más abstractas invenciones matemáticas y el más concreto universo físico. Los problemas que estas *nuevas* observaciones plantean a la ontología de los objetos matemáticos son enormes –¿donde "viven" esos objetos: en la aritmética *o* en el mundo físico? ¿puede realmente contemplarse esa alternativa? ¿puede elaborarse en cambio una ontología transitoria, no bipolar?–, y no dejaremos de abordarlos en la tercera parte de este trabajo.

Con el neologismo *quiddital* (de *quidditas*, "lo que es") designaremos en este capítulo el proceso de *descenso* entre altas construcciones abstractas de la matemática contemporánea y su aplicación al mundo físico ("lo que es"). Este "ser" se subdivide en una tirante contraposición entre la "esencia" (*ousia*) y la "existencia" (*huparxis*), en un *contrapunteo*[182] *de transvases de lo real* que debe recordarnos la dialéctica matemática entre esencia y existencia estudiada por Lautman.

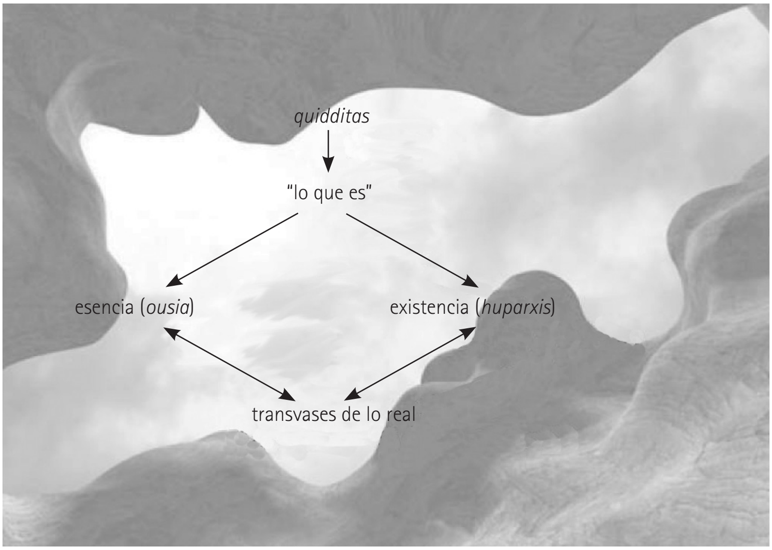

Figura 9. *El ámbito de lo quidditat*

Los trabajos de Sir **Michael Atiyah** (Inglaterra, n. 1929) han otorgado un impulso definitivo a la eventual aplicabilidad de sofisticadas herramientas de la matemática contemporánea para la comprensión de fenómenos físicos asociados. Distinguido con la Medalla Fields (1966)[183] y el Premio Abel (2004), Atiyah es conocido sobre todo por su famoso *teorema del índice* (en colaboración con Singer, 1963)[184], un resultado muy profundo que puede considerarse uno de los teoremas mayores del siglo XX. En efecto, el teorema combina 1. un enunciado de gran sencillez y universalidad (enlace preciso de transferencias y obstrucciones en el dominio de las ecuaciones elípticas); 2. una colección de pruebas muy diversas, provenientes de ámbitos aparentemente contrastantes de la matemática (K-teoría, teoría de Riemann-Roch, cobordismo, ecuación del calor, etc.); 3. una notable irradiación hacia un espectro matemático muy

182 Fundamental neologismo de Fernando Ortiz (1940) en su entendimiento de América Latina.

183 Los receptores de la Medalla Fields 1966 fueron Atiyah, Cohen, Grothendieck y Smale: ¡toda una impresionante revolución matemática en ciernes!

184 Michael Atiyah & Isadore Singer, "The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds", *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963): 322-433. Desarrollo en Michael Atiyah & Isadore Singer, "The Index of Elliptic Operators I-V", *Annals of Mathematics* 87 (1968): 484-604, 93 (1971): 119-149.

amplio (ecuaciones diferenciales, física matemática, análisis funcional, topología, variable compleja, geometría algebraica, etc.).

En términos conceptuales latos, el teorema del índice enuncia que el *balance* entre tránsitos y obstrucciones en ciertos cambios de la naturaleza está completamente caracterizado por la *geometría* del entorno donde se realiza el cambio. En términos más precisos, dado un operador diferencial elíptico ("cambio"), el índice ("balance") –definido como el número de soluciones ("tránsitos") *menos* el número de restricciones ("obstrucciones") del operador– está completamente determinado por adecuados invariantes topológicos ("geometría del entorno"). En términos aún más acotados, si nos damos un operador diferencial elíptico[185] D, y si definimos el *índice analítico* de D por $ind_{analit}(D)$ = dim $Ker(D)$ – dim $coKer(D)$ (núcleo $Ker(D)$: "soluciones", es decir, funciones armónicas; conúcleo $coKer(D)$: "obstrucciones", es decir, restricciones en ecuaciones no homogéneas del tipo $Df = g$), el teorema del índice afirma que el índice analítico puede caracterizarse mediante un *índice topológico* $ind_{top}(D)$ ligado a invariantes puramente cohomológicos[186] del entorno geométrico del operador. Un hecho de sumo interés que se deriva de este teorema consiste en observar cómo las soluciones y las obstrucciones, que son completamente *inestables por separado* (gran variación local de las ecuaciones diferenciales), resultan ser no obstante *estables en su diferencia* (unificación global de los índices). Volveremos sobre el hondo interés filosófico de este tipo de resultados –de nuevo, inexistentes en las matemáticas elementales–, pero puede desde ya intuirse la riqueza de una aproximación filosófica que tome realmente en serio la *dialéctica de contraposiciones de los flujos matemáticos* encarnada *demostrativamente* en el teorema del índice.

El teorema del índice provee un impactante tránsito *quiddital* entre el análisis y la topología, con aplicaciones de todo tipo, ya que las ecuaciones elípticas sirven para modelar múltiples situaciones de la física matemática. Pero más asombroso aún es el *sostén eidal* de ese tránsito, el cual radica en los *escondidos fondos de geometría algebraica* subyacentes a la prueba del teorema. En ese sentido, la génesis del teorema del índice es reveladora. El teorema de Riemann-Roch (1850) propone controlar algebraicamente (dimensión) el espacio de funciones meroformas asociadas a una curva

185 Los operadores elípticos (cuyos coeficientes en las derivadas parciales de orden superior deben satisfacer una condición apropiada de *positividad*) aparecen ubicuamente en la matemática: operador de Laplace ($y_1^2+...+y_n^2$), asociado a la ecuación del calor; operador de Toeplitz (dada f continua, tomar parte holomorfa en la multiplicación de f por holomorfa), asociado a las ecuaciones de Cauchy-Riemann; operador de Fredholm (derivación en los fibrados tangentes de una variedad), asociado a ecuaciones de elipticidad en las fibras.

186 Se trata de un invariante sofisticado que involucra, entre otros constructos, el isomorfismo de Thom entre los grupos de homología de una variedad y de su espacio cotangente (módulo borde), los caracteres de Chern provenientes de la K-teoría, y las clases de Todd de una variedad. Sin poder entrar en detalles técnicos, se ve cómo aparecen entonces algunos conceptos eminentemente abstractos, típicos de los *transvases de las formas* que pudimos contemplar en el capítulo anterior, y que aquí se aplican a los transvases de lo real.

mediante el control topológico (género) de las superficies de Riemann asociadas a la curva. Se presenta así una primera *gran translación* de conceptos matemáticos, que da lugar a la *problemática general* de cómo controlar globalmente las soluciones de ciertos sistemas lineales con parámetros algebraicos *mediante* invariantes topológicos apropiados. Las generalizaciones del teorema de Riemann-Roch resultan ser entonces legión, y se sitúan en la frontera (diacrónica) de las matemáticas modernas y contemporáneas: Schmidt (1929, para curvas algebraicas), Cartan-Serre-Hirzebruch (1950-56, para *un* sistema de haces), Grothendieck (1957, para *todos* los sistemas de haces con parámetros algebraicos: K-teoría[187]), Hirzebruch-Atiyah (1958, para haces con parámetros continuos: K-teoría topológica). Como consecuencia de estos avances en la *problemática genérica* del tránsito entre lo algebraico y lo topológico sobre el fondo de la variable compleja (Riemann-Roch), Gelfand propone en 1960 un enunciado genérico acerca de la invarianza homotópica del índice. La ruptura emerge finalmente en 1963, cuando –al trabajar con ecuaciones diferenciales elípticas en vez de sistemas lineales con parámetros y al considerar las funciones algebraicas como holomorfas que satisfacen elipticidad (ecuaciones de Cauchy-Riemann)– Atiyah y Singer introducen el cambio radical de perspectiva que lleva a combinar el enunciado del teorema del índice (*à la* Gelfand) con todo el instrumentario de conceptos intermedios en la herencia de Riemann-Roch (à la Grothendieck).

Tanto en la presentación de Cartan[188] sobre la obra de Atiyah, al recibir este la Medalla Fields, como en una posterior mirada retrospectiva de Atiyah[189], ambos matemáticos resaltan la importancia de que el índice analítico ind_{analit} sea *estable bajo perturbaciones* y, por tanto, de que sea razonable esperar una fórmula topológica (ind_{top}) en términos puramente geométricos. Ya que la K-teoría (algebraica o topológica) provee el instrumentario matemático preciso para capturar extensiones de morfismos entre estructuras (algebraicas o topológicas) ligadas a perturbaciones, Atiyah señala que "la K-teoría es exactamente la herramienta justa para estudiar el problema general del índice" y que "de hecho, ¡cuánto más profundo se cava, más se confirma que la K-teoría y la teoría del índice son un único y mismo tema!"[190]. Nos encontramos aquí ante un horizonte similar

---

187 La K-teoría de Grothendieck (K por "Klassen": estudio de las clases en su *totalidad*) propone estudiar las clases algebraicas de haces, y muestra cómo pasar de las estructuras naturales de monoides de haces a ciertos *anillos* de haces (vía inversos formales en las fibras vectoriales del haz). A partir de la K-teoría, surge la famosa conjetura de Serre (1959) –todo módulo proyectivo finitamente generado sobre $K[X]$ es libre– que fue decidida positivamente en 1976 por Quillen y Suslin (la Medalla Fields 1978 para Quillen reposa en parte sobre esa prueba). Compárese la suerte de la conjetura de Serre con el trabajo de Shelah sobre la indecidibilidad de la conjetura de Whitehead: debe *golpearnos* la complejidad de un universo donde enunciados aparentemente similares se encuentran no obstante en un *deslinde* profundo. Es un *abismo* (romántico) que debe abordar la filosofía de la matemática.

188 Henri Cartan, "L'oeuvre de Michael F. Atiyah" (1966), en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 113-118.

189 Michael Atiyah, "The Index of Elliptic Operators" (1973), ibíd., pp. 123-135.

190 Ibíd., pp. 133, 134.

al que ya hemos recorrido en la obra de Grothendieck: la incorporación de un tránsito entre los objetos (variaciones, perturbaciones) para *luego* proceder a la determinación de ciertas estabilidades parciales (invariantes) bajo el tránsito. Debe observarse que, en los más diversos subcampos de la matemática, esta estrategia general da lugar a *notables formas concretas de conocimiento original*, que pasan completamente desapercibidas en ámbitos estáticos sin movimiento (por ejemplo, en ámbitos de bajo nivel de complejidad dentro de las matemáticas elementales).

Atiyah comenta que "un buen teorema debería tener varias pruebas, cuantas más mejor"[191]. Es el caso del teorema del índice, el cual, por su misma centralidad, aprovecha técnicas de múltiples dominios; cada prueba y cada punto de vista amplían entonces la "libertad", la "variedad" y la "flexibilidad"[192] del matemático. En ese trasegar dentro de lo múltiple, Atiyah describe la matemática "siempre como un continuo, ligado con su historia, el pasado", "como una unidad que no obstante no debe resultar ser una camisa de fuerza. El centro de gravedad puede cambiar con el tiempo. No es necesariamente un objeto fijo y rígido; creo que debe desarrollarse y crecer"[193]. Como hemos venido observando, el *tránsito* de los objetos es vital en la matemática avanzada (moderna o contemporánea), y la variación de los centros de gravedad de la disciplina resulta ser igualmente inevitable. En esa *dinámica* del hacer matemático, Atiyah recuerda que "nunca se llega a un teorema de la manera cómo el pensamiento lógico nos haría creer", que todo "es mucho más accidental" y que "los descubrimientos nunca aparecen tan nítidamente" como la razón posterior los presenta[194]. Cualquier reducción de la matemática a una serie de análisis lógicos no es por tanto más que un empobrecimiento –filosóficamente inaceptable– de la disciplina.

La riqueza de una matemática *quiddital*, profundamente cercana a la realidad[195], se refuerza gracias a los trabajos de **Peter Lax** (Hungría-Estados Unidos, n. 1926) en dos ámbitos privilegiados donde se modela con precisión la variabilidad de lo real: las ecuaciones diferenciales y la teoría de la computación. La aproximación al *quidditas* en Lax consiste en una suerte de *oscilación pendular*, inversa al movimiento que habíamos observado en Atiyah. En este último, se produce un *descenso de lo eidal a lo quiddital*: de la maestría técnica de Atiyah en topología algebraica se pasa a su posterior aplicación al teorema del índice. A la inversa, en Lax, una muy concreta *pragmática originaria en el quidditas* lleva a un ascenso a lo eidal, para poder *proyectarse* luego sobre el fragmento de realidad inicial. De hecho, si el "corazón" matemático para intentar captar

---

191 Martin Raussen, Christian Skau, "Interview with Michael Atiyah and Isadore Singer", *Notices AMS* 52 (2005): 225-233, cita p. 225.

192 Ibíd., pp. 226, 227.

193 Ibíd., pp. 225, 230.

194 Ibíd., p. 225.

195 Según Atiyah, "casi todas las matemáticas emergieron originalmente de la realidad externa", ibíd., p. 228.

el mundo físico se encuentra en las *ecuaciones diferenciales parciales*, y si una "tomografía" adecuada de ese corazón se encuentra en los *cálculos computacionales de las soluciones* de esas ecuaciones, el conocimiento en la intersección de esos dos campos –es decir, la especialidad misma de Lax– ayuda a describir una suerte de "fondo real" de la matemática.

La citación del Premio Abel 2005, otorgado a Lax, subraya "sus contribuciones fundamentales a la teoría y aplicación de las ecuaciones diferenciales parciales y al cómputo de sus soluciones"[196]. En palabras del mismo Lax[197], estas contribuciones pueden distribuirse en cuatro subáreas esenciales: sistemas hiperbólicos no lineales integrables[198]; ondas de *shock*[199]; semigrupo de Lax-Phillips en teoría de la dispersión ("*scattering*")[200]; soluciones de sistemas dispersivos cuando la dispersión tiende a cero. La *pendularidad* entre Atiyah y Lax se refuerza al observar cómo ambos matemáticos cubren fragmentos *complementarios* en el universo de las ecuaciones diferenciales: operadores elípticos (Atiyah; paradigma, ecuación del calor) y operadores hiperbólicos (Lax; paradigma, ecuación de onda). De manera natural, a un sistema hiperbólico pueden asociársele "leyes de conservación", gracias a integraciones adecuadas de los flujos inherentes en la *evolución* del sistema. En este ámbito, Lax trabaja en diversas estrategias alternativas: teoría y estructura general (transformaciones que preservan el espectro de un operador diferencial hiperbólico), teorías y estructuras particulares (condiciones de entropía en el caso de las ondas de *shock*, "par de Lax" para la comprensión de los solitones en la ecuación KdV[201]),

196 Portal del Premio Abel 2005: http://www.abelprisen.no/en/prisvinnere/2005/index.html

197 Claudia Dreifus, "From Budapest to Los Alamos. A Life in Mathematics", *The New York Times* 29-03-2005, disponible en: http://www.nytimes.com/2005/03/29/science/29conv.html

198 Los sistemas integrables son sistemas de ecuaciones diferenciales para los cuales existe una colección bien determinada de "cantidades conservadas" (codificadas en el *espectro* del operador diferencial), con las cuales se obtiene un conocimiento completo de las soluciones del sistema. Se trata de otra encarnación más de una de las problemáticas centrales de las matemáticas modernas y contemporáneas: el estudio de los tránsitos (aquí, ecuaciones diferenciales parciales) e invarianzas (aquí, cantidades conservadas) en ámbitos del pensamiento exacto.

199 Las ondas de *shock* son perturbaciones que propagan energía en un medio dado (usualmente fluido o electromagnético) y que se caracterizan por una discontinuidad abrupta en sus condiciones iniciales. Un caso paradigmático lo constituyen las ondas supersónicas.

200 El *scattering* estudia formas de desviación de las radiaciones debidas a ciertas fallas de uniformidad en el medio donde se propaga la radiación. Múltiples formas de dispersión en la física de partículas elementales (incluyendo rayos X) son paradigmas del *scattering.* A su vez, las fotos de radar se entienden gracias a técnicas de *scattering.*

201 La ecuación KdV (por Korteweg-deVries, 1895: $u_t + u_{xxx} + 6\ uu_x = 0$) es uno de los ejemplos mejor conocidos de ecuación hiperbólica *no lineal.* La ecuación modela el comportamiento de las ondas en un fluido (una superficie líquida, por ejemplo), y ha sido particularmente útil para aplicaciones en la arquitectura naval y para el estudio de las mareas. La ecuación KdV da lugar a un sistema completamente integrable, y sus soluciones ("solitones") poseen un buen comportamiento, ya que pueden ser descritas como ondas *solitarias* que se desplazan uniformemente en el medio, repitiendo un mismo patrón de propagación (Kruskal & Zabusky, 1965). El conocimiento de estos solitones puede ser *linealizado* mediante métodos inversos de *scattering*, y el "par de Lax" permite describir esa inversión mediante dos operadores lineales no conmutativos

cálculos computacionales específicos ("cercanía" entre un sistema general y un sistema integrable[202]).

Lax resalta la importancia de "observar un problema en lo grande y en lo pequeño", de "combinar ambos aspectos" y de aprovechar entonces esa "fortaleza" combinatoria[203]. Se trata de un oscilante equilibrio conceptual que el mismo Lax ve reflejado en su *estilo*, un estilo donde se busca una cierta elegancia, entendida como revelación, sencillez y equilibrio entre lo abstracto y lo concreto, una elegancia que debe poderse reflejar en las diversas pruebas que debe tener un importante teorema matemático. De esta manera, la riqueza del pensamiento matemático, según un practicante de primera línea en la disciplina, radica en los *múltiples tránsitos* de prueba, y no en *el fijo* enunciado demostrado. Una vez más, vemos entonces cómo cualquier reducción lógica (o tautológica, al estilo del primer Wittgenstein) de un enunciado con un alto umbral de complejidad *eliminaría* todo su verdadero contenido matemático, codificado en diversas y contrastantes pruebas estructurales, en diversos y contrastantes experimentos calculatorios.

El *ir y venir* entre el cálculo y la estructura, entre el mundo físico y la abstracción matemática, entre lo *quidditai* y lo *eidal*, es para Lax un proceso imprescindible, que explica el enorme *vigor* de las matemáticas:

> Mi amigo Joe Keller, un matemático aplicado muy distinguido, fue instado a definir lo que eran las «matemáticas aplicadas», y salió con esto: «las matemáticas puras son una rama de las matemáticas aplicadas». Lo que resulta verdadero si se piensa un poco sobre ello. Originalmente, las matemáticas, digamos después de Newton, se construyeron para resolver problemas muy concretos que surgieron en la física. Luego, esas técnicas se desarrollaron por su cuenta y se convirtieron en ramas de las matemáticas puras, pero todas provenían de un trasfondo aplicado. Como lo señaló von Neumann,

adecuados. Vemos aquí cómo una situación *quidditai* muy concreta (ondas en el agua, ecuación KdV) da lugar a toda una arquitectura *eidal* posterior (sistema integrable, solitones, par de Lax), que vuelve a reencarnar posteriormente en el *quidditas*. Pero la riqueza de los tránsitos matemáticos no se restringe a una sola dirección. De hecho, Kontsevich (1992) ha logrado demostrar una conjetura de Witten, según la cual la función generadora de los números de intersección de espacios sobre curvas algebraicas (*moduli*) satisface la ecuación KdV. De esta manera, ¡algunos de los constructos más abstractos de la matemática están regidos por una ecuación ubicua de la física matemática! Al acercarnos más adelante a las obras de Connes y de Kontsevich, veremos cómo la riqueza de entronques entre la matemática abstracta y la física logra superar nuestros más exigentes umbrales de asombro.

202 Lax convoca el "teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser que afirma que un sistema cercano a un sistema completamente integrable se comporta como si fuese completamente integrable. Ahora bien, lo que «cerca» significa es una cosa cuando se demuestran teoremas, y otra cosa cuando se hacen experimentos. Es otro aspecto donde *la experimentación numérica revela cosas*" (Martin Raussen & Christian Skau, "Interview with Peter D. Lax", *Notices AMS* 53 (2006): 223-229, cita p. 224, nuestras cursivas). Así, extensos cálculos en el *quidditas* ayudarían a *revelar estructura* en el *eidos*: una posición muy cercana a los comentarios de Grothendieck alrededor de ciertos cálculos cohomológicos concretos que incitarían a la emergencia estructural de los motivos.

203 Ibíd., p. 224.

> después de un tiempo esas ramas puras, que se desarrollaron por su cuenta, requieren volverse a vigorizar con nuevo material empírico: preguntas científicas, hechos experimentales y, en particular, evidencias numéricas. [...] Creo que las matemáticas poseen una *misteriosa unidad* que realmente conecta partes aparentemente distintas, lo que constituye una de las *glorias* de las matemáticas[204].

La sólida abstracción de las matemáticas y la computabilidad a larga escala que practica Lax se *revierten* la una en la otra. La "unidad" –y la consecuente "gloria"– de esos tránsitos constituye una de las *especificidades* de las matemáticas avanzadas. Cuando el tránsito *entre* lo "puro" y lo "aplicado" –sin direccionamientos privilegiados y en forma abierta hacia *ambos* polos– rompe además con las expectativas razonables de la comunidad matemática, la "gloria" y el "honor del espíritu humano" se exacerban. Es el caso, como veremos ahora, con las "aplicaciones" del semigrupo de Lax-Phillips en teoría de números y, en forma aún más sorprendente, como veremos luego, con la estrategia (en curso) de Connes para acercarse a una prueba de la hipótesis de Riemann mediante herramientas procedentes de la física, o con los trabajos de Connes alrededor de la "aparición" del grupo de Grothendieck-Teichmüller en cosmología.

En sus trabajos alrededor del espectro de un operador sobre una variedad hiperbólica, Lax y Phillips introducen[205] un semigrupo formal –colección de operadores $Z(t)$ asociados a proyecciones ortogonales de las ondas sobre adecuados subespacios del espacio de Hilbert $L_2(\mathbf{R})$– para poder controlar el *scattering* asociado a la propagación de las ondas (es decir, el comportamiento asintótico de las ondas en tiempos remotos, pasados o futuros). Fadeev y Pavlov observan luego (1972) que, en el caso de aplicarse la teoría de Lax y Phillips a la ecuación de onda *no euclídea*[206], surgen reveladoras conexiones con el análisis armónico de ciertas funciones automorfas. Fundando de nuevo[207] la teoría del *scattering* sobre bases no euclídeas, Lax y Phillips logran entonces caracterizar las propiedades meromórficas de las series de Eisenstein[208], producir fórmulas explícitas y exhibir pruebas cortas y generales (es decir, "elegantes" en el

---

204 Ibíd., p. 225 (nuestras cursivas). Von Neumann, mentor del joven matemático húngaro en Los Alamos, es para Lax el ejemplo a seguir en matemáticas: poderosa visión y gran capacidad calculatoria, rompiendo siempre las supuestas barreras entre matemática "pura" y matemática "aplicada".

205 Peter Lax & Ralph Phillips, *Scattering Theory*, New York: Academic Press, 1967.

206 Dada la ecuación de onda $u_n = c^2\nabla^2 u$ (con el Laplaciano $\nabla^2 = \sum\partial^2/\partial_i^2$), la ecuación de onda no euclídea se obtiene por medio de la perturbación $u_{tt} = c^2\nabla^2 u + u/4$.

207 Peter Lax & Ralph Phillips, *Scattering Theory for Automorphic Functions*, Annals of Mathematics Studies 87, Princeton: Princeton University Press, 1976.

208 Dado z en el plano de Poincaré (es decir $z\in\mathbf{C}$ con $Im(z)>0$) y dado $k\geq 2$, la serie de Eisenstein asociada se define por $\sum_{m,n\neq 0}(m+nz)^{-2k}$. Se trata de una función holomorfa que converge absolutamente en el plano de Poincaré, que resulta invariante bajo el grupo modular $SL_2(\mathbf{Z})$ y que se extiende a una función meromorfa sobre $\mathbf{C}$. Son famosas las notables "identidades de Ramanujan", que el genial matemático hindú propuso acerca de los coeficientes de las series de Eisenstein, y que corresponden a sofisticadas identidades diferenciales entre las series.

sentido de Lax ya señalado), consiguiendo revelar así un *tránsito totalmente inesperado* entre lo diferencial y lo aritmético, a través de las propiedades algebraicas del semigrupo *Z(t)*.

No obstante, en una revisión posterior de la teoría[209], Lax y Phillips explican cómo la conexión entre la geometría no euclídea *natural* modelada sobre el plano de Poincaré (es decir, el grupo de las transformaciones racionales $w \rightarrow (aw+b)/(cw+d)$, con $a,b,c,d \in \mathrm{R}$, y $ad-bc=1$) y los diversos tipos de invariantes *naturales* asociados a esa geometría (L_2, Dirichlet, Laplace-Beltrami)[210] resulta ser la conexión profunda que permite explicar el "*sentido intrínseco*"[211] escondido en las ecuaciones diferenciales similares a la ecuación de onda no euclídea, un sentido que puede ser vislumbrado precisamente gracias al semigrupo *Z(t)*. De esta manera, observamos cómo un *mixto* pleno en el sentido de Lautman (el semigrupo Lax-Phillips) permite *mediar naturalmente* entre los ámbitos de lo diferencial y lo aritmético –aparentemente distantes– gracias a la detección de un *mismo modelo natural* que acerca cada uno de esos ámbitos: el plano de Poincaré, visto como modelo no euclídeo, con su geometría diferencial riemanniana y sus invariantes analíticos, por un lado; y el mismo plano, visto como modelo complejo, con su teoría de funciones automorfas y sus invariantes aritméticos, por otro lado. En este tipo de situaciones, nos enfrentamos a una sofisticada red de tránsitos entre lo *quiddital* y lo *eidal*, con múltiples apoyos contrastantes en la red: motivaciones físicas (*scattering*, ondas), modelos concretos (plano de Poincaré, no euclidianeidad, formas modulares), estructuras genéricas (geometrías, invariantes, semigrupos).

Un sofisticada red de motivaciones provenientes de la física, un muy amplio espectro de ejemplos del análisis funcional, de la geometría, del álgebra, y una poderosa maquinaria teoremática abstracta se combinan en la obra de **Alain Connes** (Francia, n. 1947): concreción de una matemática profundamente orientada hacia lo *quidditral*, pero que es también reflejo del tránsito *eidal* –pendular e inevitable– de las altas matemáticas. Medallista Fields (1982) por sus trabajos de clasificación para *álgebras de operadores* en álgebras de von Neumann y por sus aplicaciones de la teoría de C^*-álgebras[212] a la geometría diferencial, Connes trabaja desde

209 Peter Lax & Ralph Phillips, "Scattering Theory for Automorphic Functions", *Bulletin of the American Mathematical Society* New Series 2 (1980): 261-295.

210 Ibíd., p. 262.

211 Ibíd.

212 Una C^*-álgebra es un álgebra de Banach (álgebra asociativa con topología normada completa) con un operador de involución ( )* que se comporta bien multiplicativamente con respecto a la norma. Los ejemplos originarios de C^*-álgebras son las álgebras de matrices (ligadas a la mecánica matricial de Heisenberg) y las álgebras de operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert (ligadas a la mecánica cuántica, siguiendo a von Neumann). Las álgebras de von Neumann son C^*-álgebras de operadores cerradas bajo ciertas topologías débiles. Las C^*-álgebras son objetos matemáticos *mixtos* en el sentido de Lautman, donde se enlazan *lo lineal y lo continuo*, a través de una jerarquía de propiedades *intermedias* referentes a convexidad, orden, identidades y cocientes. Para una presentación de los primeros trabajos de Connes, véase Huzihiro Araki, "The work of Alain Connes", en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 337-344.

muy temprano (tesis doctoral de 1973) en la unificación de diversas herramientas conceptuales abstractas aparentemente distantes (operadores modulares y ergódicos, propiedades de proyectividad e inyectividad), y en su uso múltiple[213] en el análisis funcional y en la física matemática subyacente. Posteriormente, Connes obtiene un *teorema del índice* para foliaciones[214] (1981), y empieza a desarrollar, en los años ochenta, su *geometría no conmutativa*. En la estela de grandes obras unificadoras como las de von Neumann, Grothendieck o Atiyah, Connes *abre* las matemáticas hacia programas de investigación de largo alcance[215].

La emergencia del *paradigma no conmutativo* en Connes se apoya sobre tres pilares básicos[216]: 1. la ubicuidad real (*quiddital*) de espacios cuyas álgebras de coordenadas son no conmutativas; 2. el poder técnico de herramientas abstractas (*eidales*) que pueden extenderse a situaciones no conmutativas (cohomología cíclica, K-homología, teoría espectral, "termodinámica" de operadores); 3. la riqueza armónica de ciertas *razones* muy generales:

$$\frac{\text{Geometría euclidiana}}{\text{Geometría no euclidiana}} \equiv \frac{\text{Conmutativo}}{\text{No conmutativo}} \equiv \frac{\text{Física Tierra}}{\text{Física Cosmos}} .$$

En efecto, puede verse que la no conmutatividad aparece *de manera natural* en campos esenciales de la física (espacios de fase en la mecánica cuántica, modelos cosmológicos del espacio-tiempo), de la geometría

213 El vaivén entre lo uno y lo múltiple es *plenamente bipolar* en Connes. De hecho, aprovecha las herramientas abstractas de la matemática para aplicaciones en física (uso de las C^*-álgebras para el entendimiento de la mecánica cuántica, precisando el programa de von Neumann), pero, como veremos luego, aprovecha también las herramientas concretas de la física para "aplicaciones" en matemáticas (uso de la espectroscopía para el entendimiento de la hipótesis de Riemann). Acerca del evanescente *borde* entre lo puro y lo aplicado, recuérdese la paradójica definición de las matemáticas puras como subrama de las matemáticas aplicadas (Keller) evocada por Lax.

214 Una foliación es una variedad diferencial localmente descompuesta en subvariedades afines paralelas ("hojas" de la foliación). Las foliaciones aparecen por doquier en matemáticas: *(i)* dada una sumersión $f: M \to N$ entre variedades, con $\dim(M) \geq \dim(N) = n$, se obtiene una n-foliación sobre M, cuyas hojas son las componentes de $f^{-1}(x)$, $x \in N$; *(ii)* dado un grupo de Lie G actuando sobre una variedad M en forma localmente libre (es decir, tal que para todo $x \in M$ $\{g \in G : gx = x\}$ es discreto), las órbitas de G conforman las hojas de una foliación sobre M; *(iii)* dado un sistema no singular de ecuaciones diferenciales, la familia de soluciones de la ecuación conforma una foliación, y el conocimiento global de las soluciones determina el comportamiento de la foliación. Un *teorema del índice para foliaciones*, como el obtenido por Connes, enlaza entonces ciertas construcciones generales de la geometría diferencial con las técnicas de geometría algebraica subyacentes en el teorema del índice. La matemática avanzada sigue elevándose así sobre *incesantes tránsitos* entre sus subdominios.

215 Apropiadamente –en la estela de Grothendieck– Connes es profesor permanente en el *IHES* (desde 1979), y –en la estela de Serre– es profesor permanente en el *Collège de France* (desde 1984).

216 Connes es un magnífico expositor y defensor de sus ideas. Véanse, por ejemplo, Alain Connes, *Noncommutative geometry*, San Diego: Academic Press, 1994; Alain Connes & Mathilde Marcolli, *A Walk in the Noncommutative Garden*, preprint (ftp://ftp.alainconnes.org/pardis.pdf); Alain Connes, "A short survey of noncommutative geometry" (2000) (ftp://ftp.alainconnes.org/shortsurvey.pdf). La página de Connes (www.alainconnes.org) posee una bibliografía completa, disponible en archivos pdf. Las descripciones que aparecen en nuestro texto provienen de los textos de Connes, con algunos énfasis añadidos por nuestra parte.

(duales de grupos discretos no abelianos, toros no abelianos, espacios de foliaciones), o del álgebra (espacios de adeles, álgebras modulares, Q-retículos). Se trata de una ubicuidad de lo no conmutativo en la *naturaleza real*[217], que va de la mano con una *extensión de la noción de espacio* desde el punto de vista de su *naturaleza conceptual*: el paso de las variedades infinitesimales (Riemann) a las C^*-álgebras de operadores compactos (Hilbert, von Neumann), el paso de la K-homología dual (Atiyah, Brown, Douglas, Fillmore) a las C^*-álgebras no conmutativas (Connes), el paso del teorema del índice (Atiyah, Singer) a los manejos de convoluciones no conmutativas en grupoides (Connes), el paso de los grupos y álgebras de la geometría diferencial moderna (Lie) a los grupos cuánticos y a las álgebras de Hopf[218], el paso de lo puntual conjuntista a acciones de monoides no conmutativos en topos de Grothendieck, etc.

Debiendo elegir entre los diversos resultados y subprogramas de investigación adelantados por Connes en su aproximación a lo *quidditai*, resaltaremos aquí dos de ellos: 1. la emergencia de un grupo de Galois "cósmico" cercano al grupo de Galois "absoluto" en teoría de números, forma de tránsito entre una configuración *eidal* conocida (grupo absoluto) y una *quiddital* por explorar (grupo cósmico); 2. la utilización de técnicas de espectroscopía en un intento de demostración de la hipótesis de Riemann, forma *inversa* de tránsito entre lo *quiddital* y lo *eidal*. En un célebre artículo, Pierre Cartier, uno de los mayores discípulos de Grothendieck, había conjeturado que "hay muchas razones para creer en un «grupo de Galois cósmico» que actúe sobre las constantes fundamentales de las

---

217 No sobra recordar aquí el notable estudio de Lautman sobre *simetría y disimetría* en matemáticas y física, suerte de preludio de lecturas no conmutativas posteriores (ver p. 40 en este trabajo).

218 Las álgebras de Hopf son las estructuras que surgen al obtener teoremas de representación de grupos algebraicos (combinaciones de grupo y de variedad algebraica: caso de los grupos lineales, los grupos finitos, las curvas elípticas, etc.). Vladimir Drinfeld (Medallista Fields 1990) introdujo los grupos cuánticos (1986) como deformaciones no rígidas de álgebras de Hopf, y mostró su aparición natural en la ecuación de Yang-Baxter, ecuación central para los dominios de la mecánica estadística. A su vez, la teoría de cuerdas en la física contemporánea (utopía pascaliana del acuerdo entre lo infinitamente pequeño –mecánica cuántica– y lo infinitamente grande –relatividad general–) está requiriendo una sofisticada teoría matemática de nudos, sólo manejable adecuadamente mediante grupos cuánticos y mediante n-categorías (categorías en las que se *eleva la escala de tránsitos*: más allá de morfismos entre morfismos, es decir funtores, y de morfismos entre funtores, es decir transformaciones naturales, se estudian morfismos entre transformaciones naturales, luego morfismos entre esos morfismos de nivel inferior, y así sucesivamente). Los primeros trabajos de Drinfeld (¡a los 20 años!) resolvieron la conjetura de Langlands para el caso $GL(2{:}k)$, con k campo global de característica finita. Como veremos, Drinfeld propuso también una descripción combinatoria del grupo de Grothendieck-Teichmüller, con sorprendentes aplicaciones en la física. A partir de Drinfeld, y culminando tal vez en Kontsevich, la escuela rusa ha generado una extraordinaria profusión de resultados teóricos en física, aprovechando tanto las abstracciones categóricas de la obra de Grothendieck, como las conjeturas funtoriales del programa de Langlands. Un *alto enlace* (categórico) de aritmética-álgebra-geometría parecería estar escondiendo así la llave oculta de los misterios continuos de la física. Las consecuencias filosóficas de una tal situación son de enorme relevancia, aunque resulten simplemente *inobservables* en los tratados usuales de filosofía matemática.

teorías físicas, grupo que debería estar relacionado de cerca con el grupo de Grothendieck- Teichmüller"[219].

Una de esas razones consistía en un resultado de Connes y Kreimer (1999), donde se demostraba que el álgebra de Lie del grupo de Grothendieck-Teichmüller[220] actuaba naturalmente sobre el álgebra correspondiente a los diagramas de Feynman. Poco después, Connes y Marcolli (2004) lograron demostrar que el grupo de Galois cósmico podía describirse como el grupo simétrico universal *U* de las teorías renormalizables de la física, y que, en efecto, su álgebra de Lie extendía al álgebra de Lie del grupo de Grothendieck-Teichmüller[221].

El "sueño de Cartier", como se denominó su conjetura durante unos años, ha logrado entonces "realizarse" gracias a los resultados de Connes y de su equipo, y representa así una suerte de *pitagorismo potenciado*, *infinitamente refinado* desde las primeras toscas hipótesis originales acerca de la existencia de correspondencias armónicas entre *mathematika* ("estudio de la cantidad") y *kosmos* ("orden")[222]. Este refinamiento aritmético-geométrico-físico se extiende, en los trabajos de Connes, a analogías más profundas entre las divergencias físicas en la teoría de campos y las mixturas aritméticas en los motivos de Tate[223], acercándose así a lo que

219 Pierre Cartier, "A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry", *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series) 38 (2001): 389-408, cita p. 407. El artículo de Cartier fue escrito originalmente en francés en 1998, al cual se añadió una posdata en 2000, de donde tomamos nuestra cita. El grupo de Galois *absoluto* es el grupo de Galois de la extensión algebraica (infinita) $Gal(\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q})$ donde $\overline{\mathbb{Q}}$ es la clausura algebraica de los racionales; el grupo de Grothendieck-Teichmüller (*GT*) propone una descripción *combinatoria* del grupo de Galois absoluto. Es una conjetura aún abierta la equivalencia de las descripciones algebraica y combinatoria ($GT \approx Gal(\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q})$). El grupo de Grothendieck-Teichmüller aparece de manera natural en los "dibujos de niños" de Grothendieck (1983): objetos finitarios que intentan caracterizar el comportamiento de los cuerpos de números a través de ciertas superficies de Riemann asociadas. Aún por entenderse plenamente, los "dibujos de niños" –formas de comprensión combinatoria de lo algebraico a través del análisis– conforman un típico *tránsito grothendickiano*.

220 El álgebra de Lie de *GT* puede ser descrita como el álgebra libre sobre los números de Euler $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ... (donde $\zeta(k)=\sum_{n\geq 1} n^{-k}$). Los números de Euler aparecen en muchos rincones de la teoría de números, pero son objetos aún casi del todo desconocidos: solo se ha probado la irracionalidad de $\zeta(3)$ (Apéry 1979, un "tour de force" aislado durante muchos años) y, hace poco, la irracionalidad de infinitos $\zeta(k)$ con k impar (Rivoal 2000). Véase Cartier, "A mad day's...", op. cit., pp. 405-406.

221 El álgebra de Lie de *U* es el álgebra libre sobre $\zeta(1)$, $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, ... Las cercanías entre el grupo de Galois absoluto $Gal(\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q})$ y el grupo de Galois cósmico *U*, a través de la mediación *GT*, permiten señalar entonces una *acción totalmente inesperada de un grupo aritmético sobre las constantes universales de la física* (constante de Planck, velocidad de la luz, constante gravitatoria, etc.).

222 No sobraría aquí un regreso desprejuiciado al *Timeo* platónico. *Independientemente* de los cálculos allí contemplados, y evidentemente superados, la *estrategia relacional subyacente* de Platón no se encuentra tan alejada de la búsqueda relacional de correspondencias entre formas aritmético-geométricas y estructuras cosmológicas ahora contemplada por Cartier, Connes o Kontsevich. Volveremos sobre estas cuestiones en la tercera parte del trabajo.

223 Los motivos mixtos de Tate (1965) aparecen en la representación de las clases de homología de una variedad por medio de combinaciones lineales de subvariedades ("ciclos algebraicos") y en las conexiones de esa representación con la cohomología *l*-ádica. Los motivos de Tate sirven de guía concreta a las conjeturas generales de Grothendieck sobre motivos ("conjeturas estándar").

Connes llama el "corazón" mismo de las matemáticas: "formas modulares, funciones *L*, aritmética, números primos, todo tipo de cosas ligadas a ello"[224]. *Del sueño al corazón* obtenemos entonces una progresiva revelación en el orden del descubrimiento, que ya hemos observado detenidamente en Grothendieck, y que Connes recupera por su cuenta: "existen diversas fases en el proceso que lleva a «encontrar» nuevas matemáticas, y, mientras la fase de «chequeo» es temible e involucra sólo racionalidad y concentración, la primera fase «creativa» es de una naturaleza totalmente distinta"[225]. La emergencia de *ideas simples* después de muy *largas experimentaciones* y el tránsito gracias a "objetos mentales que representan los *pasos intermedios* en un nivel ideal"[226] apuntalan la especificidad del hacer matemático.

La inventividad de Connes se exacerba alrededor de su programa para intentar demostrar la hipótesis de Riemann[227] mediante estrategias y técnicas esencialmente provenientes de la física. El paso de lo *quidditাl* a lo *eidal* en los entornos de la hipótesis de Riemann es aquí sumamente original. Por un lado, Connes señala[228] que un estudio cuántico, con herramientas de geometría no conmutativa, del *espectro de absorción de la luz* permite recalcular, con toda la precisión deseada, todas las constantes que aparecen en los desarrollos limitados de la función zeta de Riemann.

---

224 Catherine Goldstein, George Skandalis, "An interview with Alain Connes", *EMS Newsletter* 63 (2007): 25-30, cita p. 27.

225 Alain Connes, "Advice to the beginner" (ftp://ftp.alainconnes.org/Companion.pdf), cita p. 2.

226 Connes se presenta como amante decidido de las fórmulas y de los cálculos. Véase Goldstein & Skandalis, "An interwiew with Alain Connes", op. cit., pp. 27-28 (cita p. 28, nuestras cursivas).

227 La hipótesis de Riemann codifica ciertas propiedades aritméticas mediante propiedades analíticas. La función zeta de Riemann es una función de variable compleja que se define inicialmente mediante la serie absolutamente convergente $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ para el caso *Re(s)*>1 (sobre naturales mayores que 1 coincide entonces con los números de Euler) y que luego, por extensión analítica, da lugar a una función meroforma sobre **C**, con un polo simple en s=1 (residuo 1). Una ecuación funcional obtenida por Riemann para la función zeta muestra que esta posee ceros (raíces) "triviales" en los enteros pares negativos. Riemann conjeturó (1859) que *todos los demás ceros* de la función zeta yacen en la recta compleja *Re(z)*=1/2 ("hipótesis de Riemann"). La función zeta de Riemann está ligada a la aritmética a través de diversas mediaciones: la fórmula de Euler $\sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_{p \text{ primo}} 1/(1-p^{-s})$, otras funciones "mixtas" de variable compleja determinadas por la función zeta, ecuaciones funcionales intermedias entre ellas, finos comportamientos asintóticos de las funciones. La estrategia de Riemann inaugura una profunda comprensión de lo *discreto* a través de subyacentes herramientas *continuas*, que se extenderá luego en la escuela alemana de álgebra abstracta (Artin, Hecke), y que dará lugar a las conjeturas de Weil y a la gran maquinaria cohomológica de Grothendieck. Las consecuencias de la hipótesis de Riemann en teoría de números son muy extensas, y, tal vez, la hipótesis de Riemann es considerada en este momento (2007) como el mayor problema abierto de las matemáticas. Para una descripción de la situación, véase Enrico Bombieri, "The Riemann Hypothesis", en: J. Carlson et al., *The Millenium Prize Problems*, Providence: The Clay Mathematics Institute, 2006, pp. 107-124.

228 Alain Connes, "Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function", *Selecta Mathematica* New Series 5 (1999): 29-106. La idea de utilizar el espectro y la traza de un operador en un adecuado espacio de Hilbert para capturar los ceros de la función zeta proviene de Hilbert y Pólya, como lo indica el mismo Connes. Su originalidad consiste en *combinar* herramientas *naturales* de geometría no conmutativa ligadas a espacios de Hilbert, y situaciones físicas *universales* subyacentes a esos instrumentarios.

Un giro crítico fundamental en esa aproximación consiste en calibrar la aparición de un signo negativo (que Connes califica de "cohomológico") en las aproximaciones a los ceros de la función zeta gracias a absorciones (y no emisiones) en un espectro. Por otro lado, Connes propone una amplia construcción[229] de *analogías* para intentar *transferir* la demostración de una hipótesis generalizada de Riemann, obtenida por Weil (1942) en el caso de los campos globales de característica $p>0$, al caso de las extensiones finitas de **Q** ("campos de números"). La estrategia de Connes (anunciada en 2005 con Consani y Marcolli, y dirigida hacia un futuro mediato) consiste aquí en ir eliminando progresivamente las *obstrucciones* en el tránsito gracias a la elucidación de conceptos, definiciones y técnicas en geometría no conmutativa que correspondan a los trabajos exitosos de Weil en geometría algebraica[230], y que puedan permitir así el acceso a la característica cero como "límite" (en geometría no conmutativa) de los buenos comportamientos en característica p. En todos estos procesos, *un ir y venir entre lo quiddital y lo eidal sin direcciones privilegiadas fijadas de antemano* permite la emergencia de resultados matemáticos de gran profundidad, tanto conceptual y técnica, como filosófica.

Maxim Kontsevich (Rusia, n. 1964) es otro notable creador matemático contemporáneo que ha sabido acercar la alta abstracción especulativa y la concreta riqueza de los fenómenos físicos. Según Kontsevich, Medallista Fields (1998)[231],

> para mí, como matemático, es muy interesante descifrar las reglas de juego de la física teórica, donde no se ven tanto las estructuras sino la simetría, la localidad y la linealidad de las cantidades observables. Es muy sorprendente que esas condiciones débiles lleven finalmente a estructuras tan ricas y complicadas[232].

---

229 Para detalles véase Connes & Marcolli, *A Walk in the Noncommutative Garden,* op. cit., pp. 84-99.

230 El programa de Connes muestra bien cómo proceden algunas redes de invención y descubrimiento en la alta matemática. Las "analogías" –o suerte de "conjeturas" armónicas– corresponden a precisas (pero no teoremáticas) traducciones entre la geometría algebraica y la geometría no conmutativa, con transferencias y redefiniciones técnicas de conceptos en cada contexto. La refinada organización estructural de cada ámbito permite intuir correspondencias sintéticas, que luego se delimitan analíticamente y se contrastan con los muchos ejemplos disponibles, produciendo así una suerte de *diccionario* entre la geometría algebraica y la geometría no conmutativa. Una serie de "analogías" puede verse en Connes & Marcolli, *A Walk in the Noncommutative Garden,* op. cit., p. 9. Como lo señalan los autores, las fluctuaciones implícitas en las analogías son las que *impulsan el desarrollo* posterior de las matemáticas. Eliminar en la matemática una *indispensable vaguedad inicial* –como pretendió durante un siglo la filosofía analítica– impide entonces entender las formas creativas complejas de la disciplina.

231 Para una descripción técnica de la obra de Kontsevich anterior a la Medalla Fields, véase Clifford Henry Taubes, "The work of Maxim Kontsevich", en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 703-710.

232 M. Kontsevich, Discurso de recepción en la *Académie des sciences* (2003), disponible en: http://www.academie-sciences.fr/membres/K/Kontsevich_Maxim_discours.htm (cita, p. 2).

Este es el caso de los *diagramas de Feynman*[233] en física teórica, cuyo *uso* formal en matemáticas fue introducido por Kontsevich para resolver algunos problemas formidables: 1. la conjetura de Witten sobre los espacios de módulos de curvas algebraicas; 2. la cuantización de variedades de Poisson; 3. la construcción de invariantes de nudos.

En la aritmética de los espacios de módulos de curvas algebraicas aparecen ciertos invariantes cohomológicos ("números de intersección"), que pueden ser a su vez representados como coeficientes combinatorios complejos de una serie formal $F(t_0\bar{t})$. Manipulando formalmente dos teorías cuánticas de campos, Witten conjeturó que la serie formal $U = \partial^2 F/\partial t_0^2$ satisfacía la ecuación KdV[234], lo que daba lugar a numerosas interrelaciones entre los números de intersección en la aritmética de las curvas algebraicas. Aprovechando su gran talento para el cálculo combinatorio, Kontsevich demostró[235] la conjetura de Witten y logró exhibir *explícitamente* esas interrelaciones, a partir de modelos constructivos para los espacios de módulos, basados en superficies de Riemann de diagramas con métricas. Se trata de otro extraordinario ejemplo de la riqueza inventiva de la matemática contemporánea, donde se ligan la aritmética y la física a través de vaivenes *no predeterminados* por adelantado: la conjetura es aritmético-diferencial, motivada por una contrastación física, y la prueba entrelaza fragmentos combinatorios, aritméticos y continuos sobre la base de ciertas imágenes físicas (diagramas, grafos, superficies, métricas). El *tránsito bipolar* entre la física y la matemática es entonces realmente el generador de nuevo conocimiento. No importa tanto una *supuesta base originaria* (mundo físico, mundo de las mediaciones o mundo de las ideas) que sostendría firmemente el edificio del conocimiento, sino una *ajustada urdimbre correlacional* que sostiene el tránsito del saber (ver *capítulos 8 y 9*).

Los fenómenos de cuantización –deformación de cantidades observables mediante nuevos parámetros y estudio asintótico de las deformaciones cuando los parámetros tienden a cero– aparecen en física en múltiples niveles, y, particularmente, en el estudio de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Por un lado, en la relatividad general, se observa cómo el grupo de Poincaré (isometrías del espacio-tiempo de Minkowski) tiende al grupo de Galileo (isometrías del espacio euclideano)

---

233 Los diagramas de Feynman son grafos que permiten representar perturbaciones de partículas en la teoría cuántica de campos. Ciertas (di)simetrías y (des)equilibrios combinatorios en los diagramas consiguen no sólo reducir los cálculos, sino *predecir* nuevas situaciones físicas, que posteriores cálculos matemáticos confirman. El uso heurístico de los diagramas en física teórica ha sido muy exitoso, abriendo una importante compuerta a la *visualidad* en el conocimiento teórico. Una *formalización matemática* de los diagramas aparece en André Joyal, Ross Street, "The geometry of tensor calculus I", *Advances in Mathematics* 88 (1991), 55-112 (usando herramientas de la teoría de categorías). Por otro lado, el *uso matemático* de los diagramas para resolver profundos problemas matemáticos se debe a Kontsevich.

234 Ver nuestra nota al pie 201.

235 M. Kontsevich, "Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function", *Comm. Math. Phys.* 147 (1992): 1-23.

cuando un parámetro ligado a la *velocidad de la luz* tiende a cero. Por otro lado, en la mecánica cuántica, se observa cómo las "estructuras naturales" de la mecánica cuántica tienden a la "estructuras naturales" de la mecánica clásica cuando un parámetro ligado a la *constante de Planck* tiende a cero. Las estructuras de la mecánica clásica son bien conocidas, y corresponden a las *variedades de Poisson*[236], donde puede formalizarse naturalmente el Hamiltoniano como operador de medición de la energía (posición y momento bien determinados) de los sistemas físicos clásicos. Aunque, desde un punto de vista matemático, las cuantizaciones de un álgebra ya se entendían desde los años de 1950 como cocientes de series formales sobre el álgebra (Kodaira), las *cuantizaciones de las variedades de Poisson* (que emergen entonces en la mecánica cuántica) no habían podido ser estudiadas rigurosamente antes de Kontsevich. Aquí, Kontsevich descubre[237] que esa cuantización está ligada a un *nuevo tipo de teoría de cuerdas* –donde el uso de los diagramas de Feynman es significativo– y exhibe, una vez más de manera *explícita*, que la deformación está ligada a ciertas perturbaciones de los campos cuánticos y a cálculos extremadamente finos de ciertos términos en desarrollos asintóticos. Para mayor sorpresa[238], *emerge en los cálculos* de Kontsevich una acción del grupo de Grothendieck-Teichmüller sobre el espacio de las posibles fórmulas universales de la física, grupo que parece poder verse también como el grupo de simetría de las cuantizaciones posibles de la variedad de Poisson original. Se confirma así, de otra manera totalmente imprevista, el descubrimiento simultáneo de Connes acerca de la acción del grupo de Galois absoluto sobre las constantes universales de la física.

Un tercer lugar inesperado donde emergen los diagramas de Feynman, para ayudar a la resolución de problemáticas matemáticas muy sofisticadas, es en la construcción de invariantes universales en la teoría matemática de nudos[239]. En su trabajo, Kontsevich introduce toda una serie de constructos

---

236 Un álgebra de Poisson es un álgebra asociativa con un corchete de Lie que actúa como un *derivador* de la operación del álgebra (ley $[x,yz]=[x,y]z+[x,z]y$, a leer como un análogo de la "ley de Leibniz": $\partial_x(yz)=(\partial_x y)z + (\partial_x z)y$). Una variedad de Poisson es una variedad diferencial con una estructura de álgebra de Poisson. El paradigma de una variedad de Poisson es el álgebra de las funciones suaves sobre una *variedad simpléctica* (generalización de una variedad con un Hamiltoniano).

237 M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds I", *IHES preprints* M/97/72 (1997).

238 Kontsevich describe la "sorpresa" de la emergencia de las nuevas cuerdas en sus cálculos de cuantizaciones (Kontsevich, Discurso *Académie des sciences*, op. cit., p. 1). La sorpresa de la acción del grupo de Grothendieck-Teichmüller es sin duda aún mayor.

239 Un nudo matemático corresponde a la imagen intuitiva de una cuerda anudada en la que los extremos se identifican entre sí (formalmente, un nudo es por tanto una inmersión del círculo S^1 en R^3). Una clasificación general y completa de los nudos es aún un problema abierto. Poincaré, Reidemesteir y Alexander, en la primera mitad del siglo XX, propusieron herramientas para iniciar una clasificación. Pero es sobre todo en las dos últimas décadas del siglo XX, con los trabajos de Jones y de Witten (Medallistas Fields 1990), que la teoría de nudos (*knot theory*) dio un vuelco teórico. Vassiliev propuso una serie de invariantes topológicos ligados al polinomio de Jones, que Kontsevich ha reconstruido gracias a *integrales* abstractas sobre estructuras algebraicas adecuadas, con fuertes *propiedades universales*. Véanse M. Kontsevich, "Feynman diagrams and

novedosos sobre los que se escalonan los invariantes: complejos diferenciales de grafos, grupos de cohomología de esos complejos diferenciales, formas diferenciales sobre esos grupos, integrabilidad de esas formas vía un argumento de Stokes generalizado, etc. Nos encontramos así ante un matemático extraordinariamente hábil en manejos combinatorios, y dotado de una enorme ductilidad en las formas más diversas del *tránsito exacto*: el paso técnico y calculatorio entre subramas cercanas de la matemática, el paso analógico y estructural entre ámbitos más distantes de la matemática, el paso visual y conceptual entre la matemática y la física.

Otro ejemplo de la potencia transgresora de Kontsevich se encuentra en sus ideas para formalizar homológicamente los fenómenos de la *simetría espejo* en física teórica[240]. Witten describió un desdoble topológico en fenómenos de supersimetría, que correspondía a una suerte de reflejo especular entre cuerdas (A-branas y B-branas, modelos sofisticados que incorporan superficies de Riemann y variedades holomorfas). Kontsevich conjeturó que la simetría espejo entre dos variedades X, Y correspondía a una *equivalencia de dos categorías trianguladas*[241], una proveniente de la *geometría algebraica* de X, y la otra de la *geometría simpléctica* de Y. De esta manera, complejos fenómenos de simetría en la física de lo infinitamente pequeño corresponderían a traslados de estructura entre lo discreto (variedades algebraicas) y lo continuo (variedades simplécticas), dando lugar así a otra nueva conexión, totalmente sorprendente e inesperada, entre la física y las matemáticas. Posteriormente, la conjetura de Kontsevich ha podido ser demostrada *matemáticamente* en múltiples casos –para curvas elípticas (Kontsevich, Polischuk, Zaslow), para toros (Kontsevich, Soibelman), para cuárticas (Seidel)–, y confirmada *físicamente* con el descubrimiento de nuevas cuerdas (D-branas) anticipadas por la teoría.

low-dimensional topology", *First European Congress of Mathematics (Paris 1992)*, Boston: Birkhäuser, 1994, pp. 97-121, y M. Kontsevich, "Vassiliev's knot invariants", *Adv. Soviet Math.* 16/2 (1993): 137-150.

240 M. Kontsevich, "Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry", *Comm. Math. Physics* 164 (1994): 525-562; M. Kontsevich, Y. Soibelman, "Homological mirror symmetry and torus fibrations", en: K. Fukaya et al., *Symplectic Geometry and Mirror Symmetry*, Singapur: World Scientific, 2001, pp. 203-263.

241 Las categorías trianguladas proponen axiomas (cuya naturalidad está aún en discusión) para intentar captar universalmente las propiedades de la *categoría derivada* de una categoría abeliana. Dada una categoría abeliana A (que generaliza las propiedades de la categoría de grupos abelianos), *Com(A)* es la categoría de sus complejos simpliciales con morfismos de cadenas, y *Der(A)* es la categoría derivada cuyos objetos son clases de homotopía de los objetos de *Com(A)* y cuyos morfismos son localizaciones (módulo cuasi-isomorfismo) de los morfismos de *Com(A)*. *Com(A)* y *Der(A)* son categorías trianguladas. La noción proviene de Grothendieck y Verdier (comienzo de la década 1960, tesis de Verdier 1967, ¡publicada en 1996!) para expresar en forma general ciertos principios de dualidad.

Otros trabajos[242] de Kontsevich exploran conexiones muy profundas entre motivos, "operads"[243], cohomología de álgebras de Lie y topología de variedades, buscando proveer los fundamentos de una ubicua *cohomología cuántica*, que develaría la presencia de ciertos "arquetipos" algebraicos universales detrás de múltiples fenómenos continuos de la física. Se trata de una situación que se encontraría en el "centro" mismo de las matemáticas, y que respondería de manera novedosa a la "aporía fundadora" de las matemáticas según Thom. De hecho, Kontsevich ha señalado explícitamente una posible ampliación del *corazón* de las matemáticas (recuérdese a Connes), donde se enfatiza la importancia radical de las conexiones actuales entre física y matemática:

> Es enorme el impacto de los nuevos descubrimientos físicos sobre las matemáticas. Se puede decir que, antes, en las matemáticas, existía un centro principal de misterios, es decir el grupo de todas las conjeturas que entrelazan la teoría de números, los motivos de las variedades algebraicas, las funciones *L* (generalizaciones de la funzión zeta de Riemann) y las formas automorfas, es decir el análisis armónico sobre un espacio localmente homogéneo. No obstante, ahora, la teoría de campos cuánticos y la teoría de cuerdas conforman un segundo centro de misterios, y proporcionan una nueva profundidad y nuevas perspectivas a las matemáticas[244].

De esta manera, el *quidditas* impone su enorme impronta sobre los signos *eidales* que pretenden ayudar a comprender el mundo. En medio de todas estas tensiones, vemos cómo el "mundo" consiste en una serie de datos/estructuras (primeridad peirceana), registros/modelos (segundidad peirceana) y tránsitos/funtores (terceridad peirceana), cuyo *progresivo enlace en red* no solo permite entender mejor ese mundo, sino que lo *constituye* en su misma emergencia. Veremos en el próximo capítulo cómo la matemática contemporánea está encontrando nuevos apoyos estables en esa red (invariantes, "arquetipos"), *solidificando así el pegamiento relacional y sintético tanto de los fenómenos como de los conceptos*, sin requerir un fundamento analítico para asegurar las bondades del tránsito.

---

242 M. Kontsevich, "Operads and motives in deformation quantization", *Letters in Mathematical Physics* 48 (1999): 35-72; M. Kontsevich, "Deformation quantization of algebraic varieties", *Letters in Mathematical Physics* 56 (2001): 271-294.

243 Los *operads* pueden entenderse mediante la analogía álgebras/operads ≡ representaciones/grupos. Los operads son colecciones de operaciones que se componen bien entre sí y que permiten realizar una suerte de combinatoria composicional minimal –"descarnada"–, subyacente en las álgebras superiores donde los operads "encarnan" en formas concretas. Los operads pueden verse así como un ejemplo más de constructos genéricos –o "arquetipos", no temamos el nombre–, similares a muchos otros objetos matemáticos que hemos ido viendo desfilar en estas páginas (objetos universales en categorías, cohomologías, motivos, cofinalidades posibles, etc.). En el próximo capítulo proveeremos otros datos matemáticos sobre esta emergencia de "arquetipos", y en los capítulos 8 y 9 estudiaremos su estatus óntico y epistémico.

244 Kontsevich, Discurso *Académie des sciences*, op. cit., p. 1.

Capítulo 7

Matemática *arqueal.* Freyd, Simpson, Zilber, Gromov

Una metáfora para el entendimiento de los tránsitos complejos que ocurren en las matemáticas contemporáneas se obtiene gracias a la imagen de un *péndulo articulado*. Contrariamente a un péndulo simple, el cual, al barrer su recorrido, determina una frontera *fija* equidistante entre los extremos, un péndulo articulado –que consiste en un enlace de dos péndulos oscilando en direcciones *opuestas*– define toda una extraordinaria curvatura *dinámica*, inimaginable si se consideraran solo los dos péndulos por separado. De hecho, en una cronofotografía de un péndulo articulado según Marey (1894, ver *figura 10*), puede verse cómo el *extenso espectro de todo lo intermedio* emerge en el ondulado reticulado izquierdo, abriéndose así hacia las curvas mismas de la vida y de lo orgánico. La contraposición entre un péndulo articulado y un péndulo simple sirve como contraposición metafórica entre las matemáticas avanzadas y las matemáticas elementales. En efecto, por un lado, las matemáticas avanzadas –y, muy especialmente, las matemáticas contemporáneas, como hemos puesto de manifiesto en la segunda parte de este trabajo– conllevan toda una serie de concreciones dialécticas que se elevan sobre una sofisticada *articulación* entre redes y escalas de conceptos y modelos, en múltiples niveles *eidales* y *quidditales*. Por otro lado, los bajos niveles de complejidad en las técnicas de las matemáticas elementales simplifican *inherentemente* el movimiento conceptual subyacente; por tanto, no necesitan articulaciones o jerarquías realmente finas (es decir, infinitamente discriminadas) en la elevación de su edificio. Tenemos así un contrapunto metafórico entre lo articulado y lo simple, que se corrobora también mediante el contrapunto entre una "*matemática relativa*", *en movimiento*, al estilo de Grothendieck (matemática contemporánea, péndulo articulado), y una "*matemática absoluta*", *en reposo*, al estilo de Russell (matemática elemental, fundamentación analítica, péndulo simple).

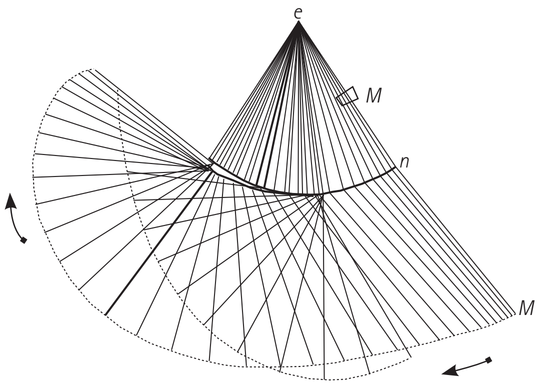

Figura 10. *Péndulo articulado. Cronofotografía según Marey*

La curvatura (dinámica, orgánica, viva) que se obtiene a la izquierda de la *figura 10* podría parecer *trascender* lo compositivo y lo proyectivo, aunque, en realidad, para quien conoce el funcionamiento del péndulo articulado, la situación es reconstruible a partir de tensiones *prototípicas* subyacentes (los impulsos contrarios entre el péndulo superior y el inferior). De manera similar, detrás de los procesos de ascenso y descenso que hemos venido describiendo en los capítulos anteriores, detrás de las oscilaciones pendulares entre fragmentos de idealidad y de realidad, detrás de lo que hemos denominado la dialéctica *bipolar* entre lo *eidal* y lo *quidditat* –es decir, detrás del *incesante tránsito en ambos sentidos* entre conceptos y datos, entre lenguajes y estructuras, entre matemáticas y física, entre imaginación y razón– han ido emergiendo en las matemáticas contemporáneas hondos *arquetipos* que permiten *estabilizar* el tránsito, *mediar* las polaridades opuestas y *equilibrar* los movimientos pendulares.

Con el neologismo *arqueal* (de *arkhê*, "principio", ver *figura 11*) designaremos en este capítulo la búsqueda (y consecución) de notables *invariantes* en la matemática contemporánea, que permiten ajustar sólidamente los tránsitos*, sin necesidad de anclarlos en un suelo absoluto*. Esos invariantes servirán de "comienzos" (*arkhô*) *relativos*, desde donde "comandarán" (*arkhên*) el movimiento en ciertos niveles dados (es decir, en categorías concretas específicas). Estaremos entonces abordando una concepción revolucionaria que ha ido emergiendo *de manera teoremática* en las matemáticas contemporáneas: el registro de *universales que pueden desligarse de un absoluto* "primigenio", es decir, de *universales relativos* que regulan el *flujo* del conocimiento. Describiremos en este capítulo ciertas construcciones técnicas en ese registro de "transvases de lo universal", y estudiaremos en el *capítulo 9* cómo puede acotarse la aparente contradicción terminológica "universal relativo", lo que dará lugar a una nueva *aporía fundadora sintética* (y no analítica, es decir no fundamentadora) de la matemática.

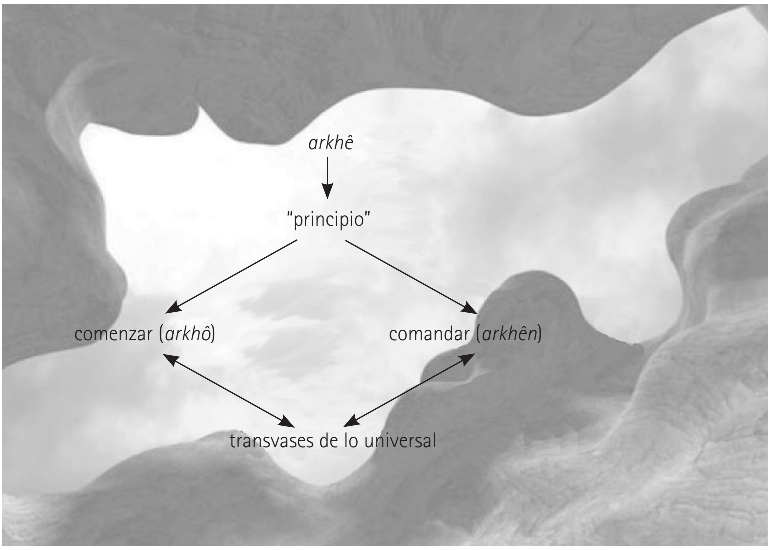

Figura 11. *El ámbito de lo arqueal.*

Los trabajos de **Peter Freyd** (Estados Unidos, n. 1935) en teoría de categorías exhiben con fuerza la emergencia de arquetipos en la estructuración del pensamiento matemático. Como ya hemos visto con Grothendieck, la dialéctica de lo uno y de lo múltiple alcanza en el pensamiento categórico una de sus expresiones más felices, pues un objeto definido por medio de propiedades universales en categorías abstractas –*uno*– resulta a su vez *múltiple* a lo largo de la pluralidad de categorías concretas donde "encarna". Lo uno y lo universal entran en perfecto contrapunto, y dialogan con lo múltiple y lo contextual. Yendo aún un paso más allá, las *alegorías*[245] de Freyd son categorías abstractas de *relaciones*, axiomatizadas por una combinatoria relacional genérica, allende las restricciones mismas de la funcionalidad, donde una atención plena a los diagramas categóricos de composición relacional lleva a develar precisos mecanismos de ajuste *uno/múltiple* entre teorías lógicas y sus diversas representaciones, que una lectura conjuntista funcional no detecta.

De hecho, la maquinaria categórica relacional de Freyd proporciona axiomatizaciones para categorías *intermedias* desapercibidas hasta entonces, de más bajo poder de representabilidad que los topos de Lawvere, y muestra que esas categorías constituyen clases de modelos naturales para lógicas intermedias entre algunas lógicas "minimales" y la lógica intuicionista. Con el descubrimiento de un notable procedimiento *ubicuo* en lógica categórica, que revisaremos enseguida, Freyd muestra cómo, partiendo de teorías puras de tipos con ciertas propiedades estructurales (regularidad, coherencia, primer orden, orden superior), pueden construirse *uniformemente* –mediante

245 Peter Freyd, André Scedrov, *Categories, Allegories*, Amsterdam: North Holland, 1990.

una *jerarquía arquitectónica* controlada– categorías *libres* que reflejan las propiedades estructurales dadas en un comienzo (categorías regulares[246], pre-logos[247], logos[248] y topos[249]). Al obtener categorías libres, se consiguen las más "descarnadas" categorías posibles, proyectables en *cualquier otra* categoría con propiedades similares: Freyd logra así construir una suerte de *arquetipos iniciales* de la teorización matemática. El descubrimiento de Freyd es doblemente significativo, pues no solo describe los invariantes del tránsito lógico-relacional, sino que lo consigue de una manera universal, *allende* las fluctuaciones particulares de cada fragmento lógico. Como sucede con los grandes giros de la matemática, los resultados de Freyd sólo serán plenamente comprendidos en el futuro, pero, desde ya, es fácil predecir su inusitada importancia.

El procedimiento de Freyd consiste en partir de una teoría lógica dada, y, *a través de una categoría libre de relaciones intermedia*, capturar la categoría libre (de morfismos) final que represente fielmente las propiedades de la teoría inicial. Es un proceso[250] T (teoría) $\rightarrow A_T$ (alegoría) $\rightarrow$ $MapSplitCor(A_T)$ (categoría), que entrega un resultado libre cuando se parte de una teoría pura de tipos, y que muestra en cada una de sus etapas –relacionalidad, subsunción en la identidad (*Cor*), invertibilidad parcial (*Split*), funcionalidad (*Map*)[251]– cómo se va "filtrando" determinado conglomerado matemático. Dos observaciones de gran interés, tanto matemático *como filosófico*, se desprenden de la "filtración" anterior: *(i)* el proceso *analítico* de descomposición del tránsito está ligado a la exhibición de un entorno *sintético* universal que emerge en el proceso (la alegoría A_T), recalcando así una vez más la existencia de una imprescindible[252] dialéctica

246 Las categorías regulares son categorías con las propiedades de exactitud necesarias y suficientes (cartesianidad, existencia de imágenes, preservación de cubrimientos bajo pullbacks) para poder realizar una adecuada *composición* de relaciones.

247 Los pre-logos son categorías regulares para las cuales el funtor de subobjetos toma valores en la categoría de retículos (y no sólo en conjuntos). Si entendemos un preorden P como una categoría, P resulta ser un pre-logos si y sólo si P es un retículo distributivo con máximo.

248 Los logos son pre-logos para los cuales el funtor subobjetos (visto a valores en la categoría de retículos) posee un adjunto derecho. Al considerar un preorden P como una categoría, P resulta ser un logos si y sólo si P es un álgebra de Heyting.

249 Hemos visto ya la aparición de los topos en la obra de Grothendieck y su posterior axiomatización elemental gracias a Lawvere. La categoría P asociada a un preorden resulta ser un topos si y sólo si P se reduce a un punto.

250 Ibíd., p. 277.

251 La *correflexividad* generaliza (en el ambiente alegórico axiomático) la propiedad de que una relación esté contenida en la diagonal (ejemplo fundamental: las relaciones de equivalencia parciales, "*pers*: partial equivalence relations", de uso creciente en la teoría de la computabilidad). *Cor* captura funtorialmente la correflexividad. La *invertibilidad parcial* generaliza la propiedad de invertibilidad de morfismos a derecha (ejemplos fundamentales: elementos regulares en un semigrupo, secciones en un haz). *Split* captura funtorialmente la invertibilidad parcial. La *funcionalidad* generaliza (siempre en el ambiente alegórico) la usual restricción conjuntista de funcionalidad para relaciones. *Map* captura funtorialmente la funcionalidad.

252 Esa "imprescindibilidad" dialéctica se torna *necesaria* en el ámbito de los teoremas de representación de Freyd. El hecho de que delicados problemas filosóficos cuenten con *reflejos teoremáticos* parciales en las matemáticas contemporáneas es una de las grandes fortalezas de esas matemáticas avanzadas, si se las compara con las matemáticas

analítico-sintético en la matemática; *(ii) allende* los objetos bipolares finales que se corresponden uno a uno (teorías y categorías regulares, teorías coherentes y pre-logos, teorías de primer orden y logos, teorías de orden superior y topos), la riqueza del procedimiento de Freyd consiste en el *progresivo ajuste del engranaje composicional sintético intermedio* (explicitación de las acciones de los funtores *Cor*, *Split*, *Map*).

En la esencia misma del pensamiento categórico subyace una *búsqueda natural de arquetipos*. Los varios niveles de información categórica (morfismos, funtores, transformaciones naturales, *n*-morfismos, etc.) permiten subdefiniciones de *objetos libres* en cada nivel, es decir, de objetos proyectivos universales (arquetipos: "comienzos que comandan", en una lectura etimológica), y, allende las proyecciones de nivel, emergen constructos libres universales mucho más generales. Es el caso del proceso $T \rightarrow A_T \rightarrow MapSplitCor(A_T)$ según Freyd, y es el caso también del famoso lema de Yoneda[253] que permite sumergir *cualquier* categoría pequeña en una categoría de prehaces:

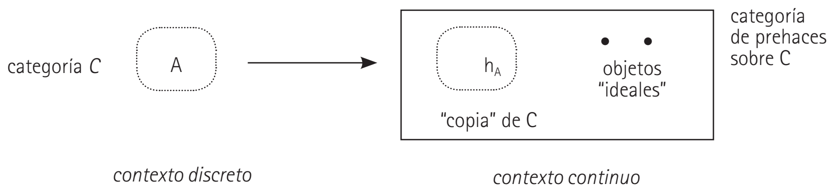

Figura 12. *El lema de Yoneda*

Los funtores representables h_A capturan las "coronas" de morfismos alrededor de A ($h_A = Mor_C(A,\text{--})$, A objeto en la categoría inicial), pero, en la sumersión de Yoneda ($A \rightarrow h_A$), aparecen muchos otros funtores no representables (prehaces "ideales") que *completan* el panorama. De hecho, la categoría de prehaces sobre C puede verse como un contexto de *continuidad* donde se inserta (y se completa) la categoría discreta inicial, pues, por un lado, la categoría de prehaces posee todos los límites (categóricos), y, por otro lado, los representables preservan los límites. La universalidad de la

elementales, donde, por *ausencia de complejidad*, no pueden aparecer reflejos similares. El bajo umbral de complejidad de las matemáticas elementales se torna por tanto en una verdadera *obstrucción* desde un punto filosófico. Volveremos sobre estas cuestiones en la tercera parte del trabajo.

253 Freyd recuerda que el lema no aparece realmente en el artículo original de Yoneda ("Note on products in *Ext*", *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958): 873-875), sino en "una conferencia dada por MacLane sobre el tratamiento de Yoneda de los funtores *Ext* de orden superior" (véase: www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/3/foreword.pdf, p. 5). El inmenso contenido filosófico del lema (sobre el cual volveremos en la tercera parte de este trabajo) corrobora el tránsito lautmaniano entre sus "nociones e ideas" y las "matemáticas efectivas". Es interesante señalar que el lema –tan cercano al fondo estructural del pensamiento de Lautman– surgió de hecho en una vívida discusión entre Yoneda y MacLane en la *Gare du Nord* de París (véase: www.mta.ca/~cat-dist/catlist/1999/yoneda), tan cercana al entorno físico del filósofo francés.

sumersión de Yoneda (válida para *toda* categoría pequeña) pone en evidencia dos hechos de enorme significado: *(i) matemáticamente*, demuestra cómo, debajo de múltiples situaciones discretas, subyacen formas de un *continuo arquetípico* conformado por objetos ideales que ayudan a reentender el contexto discreto inicial (algo que pregonaba Hilbert desde su brillante texto *Sobre el infinito*[254], y que hemos visto cuidadosamente articulado, por ejemplo, en el programa de Langlands); *(ii) filosóficamente*, muestra cómo, en la filosofía de las matemáticas avanzadas, la imbricación de fragmentos de realismo e idealismo no sólo es posible sino *necesaria* (completamiento *arquetípico* de los prehaces representables "reales" gracias a los no representables "ideales", y pleno entendimiento de los unos sólo gracias a los otros).

En una develación de los núcleos arquetípicos del pensamiento matemático, adquiere especial relevancia el programa de las *matemáticas en reverso* de **Stephen Simpson** (Estados Unidos, n. 1945). Iniciado en colaboración con Harvey Friedman[255], el programa intenta (y consigue) ubicar *subsistemas minimales y naturales* de la aritmética de segundo orden que *equivalen* a los teoremas usuales de la práctica matemática derivados de esos axiomas. La equivalencia es plena pues, a los ojos de adecuadas teorías subyacentes, los teoremas deducen a su vez el conglomerado de axiomas del cual se derivó su prueba: en el *tránsito demostrativo* existe entonces una plena dialéctica de deducción y *retroducción* (de allí el nombre "*reverse mathematics*"). En ese *ir y venir*, los fundamentos no se encuentran fijos: no importa tanto un fundamento absoluto, desde el cual pretender derivar todo, sino *múltiples pruebas relativas de equideducción* entre fragmentos de la práctica matemática. Dentro de ese movimiento de las pruebas, Simpson detecta ciertos subsistemas de la aritmética de segundo orden que son lo suficientemente "*canónicos*" o "*arquetípicos*" como para organizar colecciones de teoremas, y consigue con ello una *estratificación natural* de la matemática ordinaria, donde, por ejemplo, enunciados del tipo (a_0) lema de Heine-Borel, (a_1) teorema de Bolzano-Weierstrass, o del tipo (b_0) existencia de ideales primos en anillos, (b_1) existencia de ideales maximales en anillos, pueden clasificarse en una precisa jerarquía de complejidad equideductiva (en este caso, $a_i \Leftrightarrow b_i$ $i=1,2$, a los ojos de un sistema constructivo minimal[256]).

---

254 David Hilbert, "On the infinite" (1925), en: Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Cambridge: Harvard University Press, 1967, pp. 367-392.

255 Stephen Simpson, "Friedman's research on subsystems of second order arithmetic", en: L. Harrington et al., *Harvey Friedman's Research in the Foundations of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1985, pp. 137-159.

256 En lo que sigue definiremos esa base minimal, que denominaremos RCA_0. El punto importante que debe resaltar aquí, antes de entrar en detalles, es la *equideducción a los ojos de una base axiomática débil*. Por supuesto, desde el punto de vista analítico absoluto de la teoría de conjuntos ZF, se tiene también que ZF $\vdash a_i \Leftrightarrow b_i$ sencillamente porque ambos enunciados son *tautologías* desde el punto de vista absoluto de los axiomas de la teoría de conjuntos; pero, en este caso, la equideducción se *trivializa* y se pierde la riqueza lógica de una derivación intermedia, sin premisas fuertes que la

Dentro del lenguaje de la aritmética de segundo orden[257], Simpson define algunos subsistemas canónicos de la aritmética de la siguiente manera: *(i)* RCA_0 incorpora los axiomas básicos para términos aritméticos, el axioma de inducción $\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(x+1))\rightarrow\forall x\varphi(x)$ restringido a *fórmulas* Σ_0^1 y el axioma de comprensión $\exists X\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow x\in X)$ restringido a *fórmulas* Δ_0^1 (fórmulas dentro de la jerarquía de Kleene-Mostowski[258]); *(ii)* WKL_0 consiste en RCA_0 + "lema débil de König" (todo subárbol infinito del árbol binario posee una rama infinita); *(iii)* ACA_0 incorpora los axiomas básicos para términos aritméticos, el axioma de inducción restringido a *fórmulas aritméticas* y el axioma de comprensión restringido también a fórmulas aritméticas. Otros subsistemas de mayor poder expresivo permiten codificar manejos combinatorios infinitísticos más sofisticados, pero no los mencionaremos aquí[259].

Gracias a esos núcleos ("arquetipos") de poder deductivo, Simpson obtiene entonces una *estratificación real* de los teoremas de la matemática ordinaria al demostrar profundas equiconsistencias lógicas como las siguientes: *(1)* a los ojos de RCA_0, equivalencia plena (deducción y retroducción) del sistema WKL_0 con muchos enunciados significativos demostrables *dentro* de WKL_0 (lema de Heine-Borel, completitud de la lógica de primer orden, existencia de ideales primos en anillos conmutativos enumerables, Riemann-integrabilidad de funciones continuas, teoremas locales de existencia para ecuaciones diferenciales, teorema de Hahn-Banach para espacios separables, etc.); *(2)* a los ojos de RCA_0, equivalencia plena del sistema ACA_0 con muchos de sus teoremas (teorema de Bolzano-Weierstrass, existencia de ideales maximales en anillos conmutativos enumerables, existencia de bases para espacios vectoriales sobre campos enumerables, existencia de clausuras divisibles para grupos abelianos enumerables, etc.). El tránsito deductivo usual, que va de lo global (sistema en su conjunto) a lo local (teorema particular del sistema), se encuentra aquí *invertido de manera impactante, y permite un paso inesperado de lo local a lo global,* gracias a la equiconsistencia del teorema con el sistema entero. Es instructivo observar cómo esa "matemática en reverso" *solo* puede emerger después de la explicitación de los candidatos naturales que

---

distorsionen.

257 El lenguaje de segundo orden extiende el primer orden con variables de *dos* tipos ("conjuntistas" en segundo orden, además de "numéricas" en primer orden), con un símbolo de relación adicional ($\in$), con nuevas fórmulas atómicas del tipo $t\in X$ (t término numérico, X variable conjuntista) y con cuantificación adicional sobre variables conjuntistas (de allí el "segundo" orden). Una fórmula en el lenguaje de segundo orden se llama *aritmética* si no posee variables conjuntistas cuantificadas.

258 Σ_n^0 reúne las fórmulas (en primer orden) con matriz recursiva, con n alternaciones de cuantificadores y con cuantificador externo $\exists$. Π_n^0 se define igual, para el caso del cuantificador externo $\forall$. Se define $\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$. Σ_1^0 codifica lo recursivamente enumerable, Δ_1^0 lo recursivo.

259 Véase Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, op. cit. (nuestra nota al pie 14), capítulos 5, 6, pp. 167-241 (recursión transfinita para fórmulas aritméticas y comprensión para fórmulas Π_1^1).

actúan como *núcleos deductivos arquetípicos* dentro de la aritmética de segundo orden.

Simpson describe una parte de las "matemáticas en reverso" como una reestructuración del programa de Hilbert[260]: al exhibir cuáles son los sistemas de axiomas *minimales* para demostrar los teoremas de la matemática ordinaria, se puede medir exactamente su complejidad y, en muchos casos, *reducir* esa complejidad a argumentos estrictamente finitarios. De esta manera, aunque el programa *absoluto* de Hilbert fracase debido al teorema de incompletitud de Gödel, puede *relativizarse* no obstante el programa, obteniéndose ciertas realizaciones parciales intermedias. Es el caso, por ejemplo, de las sentencias Π_0^2 demostrables en WKL_0: Simpson demuestra un resultado de conservatividad[261] de WKL_0 sobre la aritmética de Peano para fórmulas Σ_0^1, que a su vez es conservativa sobre la aritmética recursiva, y, por tanto, las sentencias Π_0^2 demostrables en WKL_0 pueden demostrarse mediante argumentos puramente finitarios. En particular, esto da lugar a pruebas finitarias de muchos resultados matemáticamente sofisticados (expresables por sentencias Π_0^2 demostrables en WKL_0): existencia de extensiones de funcionales (Hahn-Banach), de soluciones de ecuaciones diferenciales, de ideales primos en anillos conmutativos, de clausuras algebraicas, etc.

Algunos arquetipos en el espectro de las pruebas en la aritmética de segundo orden adquieren así relevancia especial, ya que consiguen *reflejarse* plenamente en los avatares de la matemática ordinaria (álgebra abstracta, topología de puntos, análisis funcional, ecuaciones diferenciales, etc.). Como lo señala Simpson, la emergencia de esos núcleos arquetípicos de prueba ocurre mediante una "*serie de estudios de caso* que lleva a descubrir los axiomas adecuados"[262], mostrando cómo la *experimentación* matemática sigue siendo siempre la que ayuda a desbrozar un panorama y a encontrar (si es el caso) adecuados invariantes detrás del movimiento. Los *procesos* de la matemática (y *ya no* sólo sus objetos) se fraguan entonces dentro de redes de contrastación múltiple, ya sea al nivel de sus representaciones lógicas, ligadas a arquetipos de prueba bien definidos, ya sea al nivel de sus correlaciones estructurales, ligadas a grandes espectros de regularidad/singularidad en dominios de tránsito/obstrucción. Nos encontramos una vez más ante un *abstracto cálculo relativo diferencial e integral*, como el

---

260 Ibíd., pp. 381-382.

261 Dada una teoría T en un lenguaje L y otra teoría T_1 en un lenguaje $L_1 \supseteq L$, T_1 es una extensión conservativa (o conservadora) de T si, para toda L-sentencia φ, $T_1 \vdash \varphi$ equivale a $T \vdash \varphi$. Simpson demuestra que ACA_0 es una extensión conservativa de la aritmética de Peano (PA, primer orden), y que tanto RCA_0 como WKL_0 son extensiones conservativas de PA restringida a fórmulas Σ_0^1 (dicho de otra manera, Σ_0^1-PA es el fragmento de primer orden de RCA_0 y de WKL_0, mientras que PA es el fragmento de primer orden de ACA_0). Las pruebas de conservatividad exhibidas por Simpson utilizan técnicas existenciales de la teoría de modelos, y se ha cuestionado la efectividad (finitaria) de tales pruebas. Sin embargo, Harvey Friedman ha anunciado que, en el caso de las matemáticas en reverso, las pruebas existenciales de conservatividad pueden convertirse en pruebas efectivas.

262 Ibíd., p. vii (nuestras cursivas).

que hemos señalado en la obra de Grothendieck, y que, en el ámbito de las "matemáticas en reverso", consiste en *diferenciar* finamente las escalas de demostración, para luego *reintegrarlas* alrededor de algunos núcleos canónicos de prueba.

Los trabajos de **Boris Zilber** (Rusia, n. 1949) llevan la búsqueda de estructuras canónicas para la lógica, el álgebra y la geometría a una profundidad mucho mayor[263]. Sus trabajos se insertan en un nuevo paradigma que emerge progresivamente en la teoría de modelos, que pasa, de ser entendida a mediados del siglo XX como "lógica + álgebra universal" (Tarski, Birkhoff; paradigma normalizado en Chang & Keisler[264]), a considerarse a fines del siglo como "geometría algebraica – cuerpos" (Shelah, Hrushovski, Zilber; paradigma normalizado en Hodges[265]). Se trata de un importante cambio de perspectiva que acerca la teoría de modelos a las visiones de Grothendieck (invariantes lógicos de dimensión cercanos a invariantes geométrico-algebraicos, estructuras o-minimales cercanas a estructuras "moderadas" (*tame*)), y, sobre todo, que sitúa la lógica dentro de una *serie de progresivas decantaciones geométricas* de los objetos y los procesos matemáticos. En esta línea, un trabajo[266] revelador de Zilber muestra cómo ciertas teorías fuertemente minimales[267] pueden ser intrínsecamente asociadas a *geometrías combinatorias*: los modelos de esas teorías se obtienen mediante "límites" de adecuadas estructuras finitas, y las geometrías intrínsecas de esos modelos, perfectamente controladas, o bien son triviales (los algebraicos no expanden al modelo), o bien son geometrías afines o proyectivas sobre un cuerpo finito, lo que permite encontrar óptimos "sistemas de coordenadas" para los modelos. Vemos aquí cómo, detrás de propiedades lógicas generales (minimalidad fuerte, ω-categoricidad), subyacen *núcleos geométricos profundos*. Si adoptamos la tensión terminológica-conceptual entre descubrimiento y creación según Grothendieck, nos enfrentamos entonces con estructuras arquetípicas

263 Agradezco aquí a Andrés Villaveces sus enseñanzas alrededor de Zilber (artículo citado, conversaciones, conferencias). Una excelente visión sobre Zilber y su época aparece en Bruno Poizat, "Autour du théorème de Morley" (en particular, la sección "1980-90: les années-Zilber"), en: Jean-Paul Pier (ed.), *Development of Mathematics 1950-2000*, Boston: Birkhäuser, 2000, pp. 879-896.

264 H.J. Keisler & C.C. Chang, *Model Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1973.

265 Wilfrid Hodges, *Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993. Una versión contemporánea de la teoría de modelos, incluyendo aportes de Zilber, aparece en Bruno Poizat, *A Course in Model Theory. An Introduction to Contemporary Logic*, New York: Springer, 2000.

266 B. Zilber, "Totally categorical theories, structural properties, and the non-finite axiomatizability", en: L. Pacholski et al., *Proceedings of the Conference on Applications of Logic to Algebra and Arithmetic* (Karpacz, 1979*)*, Berlin: Springer, 1980, pp. 380-410.

267 Una teoría es *fuertemente minimal* si los subconjuntos definibles en los modelos de la teoría son finitos o cofinitos (ejemplos: teoría de espacios vectoriales, teoría de campos algebraicamente cerrados de característica *p*). Esta situación da lugar a nociones lógicas naturales análogas a las de *dimensión* y de clausura algebraica, abriendo el paso así a una lectura de aspectos de la lógica como fragmentos de una geometría algebraica generalizada. El primer resultado de Zilber aquí mencionado se refiere a las teorías fuertemente minimales ω-categóricas (modelos enumerables isomorfos).

sintético-geométricas que se "descubren" gracias a la "invención" de lenguajes *analítico-lógicos*.

Otro trabajo fundamental[268] de Zilber propone clasificar las geometrías intrínsecas subyacentes en las teorías fuertemente minimales. La *tricotomía de Zilber* conjetura que las teorías fuertemente minimales pueden dividirse en tres clases, según su geometría asociada: *(i)* teoría con modelos "desmembrados", puramente combinatorios, en el caso de que la geometría sea *trivial*, teniéndose en ese caso una noción de dimensión conjuntista ($dim(X \cup Y) = dim(X) + dim(Y)$), y no pudiéndose interpretar en la teoría un grupo infinito; *(ii)* teoría con modelos básicamente lineales, en el caso de que la geometría sea *modular*, teniéndose en ese caso una noción de dimensión vectorial ($dim(X \cup Y) = dim(X) + dim(Y) - dim(X \cap Y)$), y pudiéndose interpretar los fragmentos finitos de los modelos mediante grupos abelianos; *(iii)* teoría con modelos bi-interpretables con el cuerpo algebraicamente cerrado de los números complejos (grupo particularmente rico), en el caso de que la geometría sea *algebraica*, teniéndose en ese caso una noción natural de dimensión algebraica. Como lo señala Poizat[269], una de las grandes riquezas de la tricotomía es la emergencia de "grupos por todas partes" en la visión de Zilber, invisibles en primera instancia, y subyacentes en lo profundo ("arquetipos"). En una suerte de renacimiento del Programa de Erlangen de Klein (1872)[270], los grupos –y sus geometrías asociadas– ayudan a clasificar así las formas profundas de la lógica, y se contempla, una vez más, cómo la lógica *no puede preceder* de ninguna manera a las matemáticas, como se pretende en algunos casos desde perspectivas analíticas.

La *conjetura* tricotómica de Zilber pretendía elucidar ciertos núcleos geométricos detrás de descripciones lógicas. Una decena de años después de la aparición de la conjetura, Hrushovski logró demostrar[271] que esta no cubría al menos un cuarto caso: mediante una *amalgamación* sofisticada en límites de modelos, Hrushovski construyó una estructura fuertemente minimal cuya geometría no era ni trivial, ni modular, ni "algebraica"[272]. No obstante, Zilber y Hrushovski conjeturaron y demostraron que la tricotomía *sí es válida*[273] para teorías cuyas geometrías intrínsecas son *geometrías de Zariski*[274]. Posteriormente, mediante un análisis muy fino

268 B. Zilber, "The structure of models of uncountably categorical theories", en: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Varsovia 1983), Varsovia: Polish Scientific Publications, 1984, pp. 359-368.

269 Poizat, "Autour du théorème de Morley", op. cit., p. 890.

270 Para una iluminadora edición moderna del texto de Klein, con prefacio de Dieudonné, véase Felix Klein, *Le programme d'Erlangen*, París: Gauthier-Villars, 1974.

271 Ehud Hrushovski, "A new strongly minimal set", *Annals of Pure and Applied Logic* 62 (1993): 147-166.

272 Es decir, en el sentido de la geometría algebraica, no bi-interpretable con un cuerpo algebraicamente cerrado. Uno de los contraejemplos de Hrushovski puede verse no obstante como una fusión, en cierto modo "algebraica", de dos cuerpos de característica distinta.

273 Ehud Hrushovski, Boris Zilber, "Zariski Geometries", *Journal of the American Mathematical Society* 9 (1996): 1-56.

274 Una geometría de Zariski es una suerte de estructura topológica variable (X_n: $n \geq 1$),

del contraejemplo de Hrushovski, Zilber se ha visto llevado a conjeturar[275] una nueva *alternativa extendida*: la geometría intrínseca de una teoría fuertemente minimal debe ser *(i)* trivial, *(ii)* modular, *(iii)* algebraica (bi-interpretable con ($\mathbb{C}$, +, ·, 0, 1)), o *(iv)* "pseudo-analítica" (bi-interpretable con una *expansión* de ($\mathbb{C}$, +, ·, 0, 1) mediante una función analítica del tipo *exp*).

El punto fundamental aquí es la aparición sorprendente (de nuevo, escondida y profunda) de la *exponencial compleja*, con la que Zilber conjetura que se podría cerrar la clasificación. Un primer camino en esa dirección consiste en explorar nociones modelo-teoréticas de pseudo-exponenciales en lógicas infinitarias donde puedan acotarse sus núcleos[276], para luego construir límites de estructuras con pseudo-exponenciales que permitan cubrir el caso *(iv)*. Otro sendero de exploración, completamente inesperado, consiste en las nuevas conexiones[277] que Zilber ha encontrado entre pseudo-analiticidad, foliaciones y geometría no conmutativa. Específicamente, Zilber ha "descubierto", por un lado, que los contraejemplos a la tricotomía corresponden a *deformaciones de curvas de Zariski mediante grupos no conmutativos* semejantes a los grupos de "toros cuánticos" y, por otro lado, que otros contraejemplos modelo-teoréticos están ligados a ciertas foliaciones estudiadas por Connes[278]. Pero, hundiéndose aún más en lo profundo[279], en el hiato abismal "teoría de modelos/geometría no

---

con condiciones de noetherianeidad y de coherencia entre los X_n. Las geometrías de Zariski pueden verse como *mixtos lautmanianos* entre la teoría de modelos, la topología algebraica y la geometría algebraica. Hrushovski, basándose en técnicas emergentes en las geometrías de Zariski, consiguió demostrar (1996) una conjetura de Mordell-Lang acerca del conteo de puntos racionales sobre curvas en cuerpos de funciones, que generalizaba la famosa conjetura de Mordell para curvas sobre $\mathbb{Q}$ (prueba por Faltings, que le mereció la Medalla Fields 1986). Se trata, tal vez, del ejemplo más celebrado en el que técnicas *provenientes de la lógica* ayudan a resolver un problema en el "corazón" de la matemática (recuérdese a Connes).

275 Boris Zilber, "Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero", *Annals of Pure and Applied Logic* 132 (2004): 67-95.

276 El núcleo de la exponencial compleja *exp*($2i\pi x$) contiene a $\mathbb{Z}$, donde, mediante suma y multiplicación, se puede reconstruir la aritmética de Peano, lo que da lugar a múltiples fenómenos de incompletitud, inestabilidad, profusión de módelos no estándar, etc. Sin embargo, usando una lógica con disyunciones enumerables ($L_{\omega_1\omega}$), el núcleo de la exponencial puede *forzarse* a ser estándar, por ejemplo mediante la sentencia $\exists a \forall x(exp(x)=0 \rightarrow \bigvee_{m\in\mathbb{Z}} x=am)$ ($a=2i\pi$ en el caso clásico). Las pseudo-exponenciales generalizan, a clases arbitrarias de modelos en $L_{\omega_1\omega}$, varias propiedades de la exponencial compleja, entre las cuales el forzamiento estándar del núcleo.

277 Boris Zilber, "Noncommutative geometry and new stable structures" (preprint 2005, disponible en: http://www2.maths.ox.ac.uk/~zilber/publ.html).

278 Ibíd., pp. 2-3.

279 La sabiduría yace hundida en lo profundo, en los abismos infinitos, como lo sugiere Melville al relatar en *Moby Dick* la segunda caída de Pip del bote ballenero y su inmersión en los estratos inferiores del océano: "El mar había burlonamente mantenido arriba su cuerpo finito, mientras anegaba la infinitud de su alma. No anegada por entero, sin embargo. Más bien hundida viva en portentosas profundidades donde *extrañas formas del desenhebrado mundo primario* se deslizaban de un lado para otro ante sus ojos pasivos; y el avaro tritón, la Sabiduría, revelaba sus tesoros apilados", en: Herman Melville, *Moby Dick* (1849-51), (eds. H. Hayford, H. Parker, G.T. Tanselle), Evanston and Chicago: Northwestern University Press and The Newberry Library, 1988, p. 414 (nuestra traducción, nuestras cursivas). La *matemática arqueal* explora activamente esas "extrañas formas del desenhebrado mundo primario" que se le escapan al azorado

conmutativa", Zilber parece estar intuyendo la presencia de *estructuras comunes de la física*[280], cuyas representaciones lógicas y geométricas serían solo facetas distintas de hondos fenómenos unitarios[281].

La obra de **Mikhael Gromov** (Rusia, n. 1943) confirma, por otros caminos totalmente distintos, la riqueza de ciertas conexiones "arquetípicas" que se develan dentro de la matemática contemporánea. Considerado posiblemente como el mayor geómetra de las últimas décadas, Gromov ha revolucionado completamente los diversos campos de estudio en los que ha incursionado: *(i)* geometría riemanniana, introduciendo nuevas perspectivas de "suavización" y "globalización" ligadas a *métricas por doquier*; *(ii)* ecuaciones diferenciales parciales, introduciendo cálculos homotópicos gracias a *relaciones diferenciales parciales* ("pde vía pdr"); *(iii)* variedades simplécticas, introduciendo *curvas pseudo-holomorfas* y, con ello, nuevas técnicas de la variable compleja dentro de la variable real; *(iv)* grupos, introduciendo nociones de crecimiento polinomial, comportamiento asintótico e *hiperbolicidad*. En todos estos campos, los trabajos de Gromov *combinan* muchas de las cualidades que Tao enumera dentro de lo que serían "buenas matemáticas"[282]: capacidad programática

---

Pim.

280 Acerca del entronque que Zilber visualiza entre objetos de la teoría de modelos y estructuras profundas de la física, comenta Andrés Villaveces: "Las estructuras que están más ligadas a la geometría no conmutativa y a las estructuras de la física son las *geometrías de Zariski no clásicas*. Éstas hacen parte del lado «positivo» de la tricotomía, y aparecieron desde el artículo de Hrushovski y Zilber. Pero sólo hasta ahora, sólo hasta los últimos dos o tres años, ha empezado Zilber a ver que ciertos casos de «cubiertas finitas» que deberían haber sido entendidos en términos de curvas algebraicas *no* se pueden reducir a estas. Esto cambia bastante fuertemente dos cosas: el entronque con la física (más ligado a un análisis refinado de las geometrías de Zariski – de cubiertas finitas pero no unitarias de variedades que solo pueden ser entendidas mediante acciones de grupos no conmutativos), y el rol aún muy abierto de las estructuras pseudo-analíticas" (comunicación personal, 2007).

281 La *gran escuela rusa* –como hemos visto con Drinfeld, Kontsevich, Zilber, y como veremos a continuación con Gromov– tiende consistentemente a revelar hondas estructuras unitarias detrás de múltiples fenómenos matemáticos y físicos. Este es el caso también de los trabajos de Vladimir Voevosdky (Medallista Fields 2002), quien ha logrado proveer un soporte técnico a los motivos de Grothendieck, como *tronco central de las cohomologías*. Gracias a la introducción de nuevas topologías de Grothendieck para objetos algebraicos, Voevodsky (2000) ha logrado construir finas formas de "cirugía" para variedades algebraicas –análogamente a "cirugías" para espacios topológicos, pero teniendo que superar obstrucciones mucho más delicadas– y ha conseguido definir teorías homotópicas para variedades algebraicas y para esquemas. En el cruce entre geometría algebraica y topología algebraica, el *ascenso eidal* de Voevodsky hacia las topologías de Grothendieck le permite luego efectuar un *descenso quiddital* hacia la cohomología singular ("enriqueciéndola" en el sentido de Voevodsky) y acotar en última instancia los *motivos arqueales* buscados por Grothendieck. Para una introducción técnica a los trabajos de Voevodsky, véase Christophe Soulé, "The work of Vladimir Voevodsky", en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 769-772.

282 Terence Tao, "What is good mathematics?", preprint, arXiv:math.HO/0702396v1 13 Feb 2007. Dentro de la lista de las posibles cualidades de un "buen" trabajo matemático, elaborada por Tao (Medallista Fields 2006), los trabajos de Gromov alcanzan la excelencia en la mayoría de las especificaciones: (i) resolución de problemas, (ii) técnica, (iii) teoría, (iv) perspicacia, (v) descubrimiento, (vi) aplicación, (vii) exposición, (ix) visión, (x) buen gusto, (xiv) belleza, (xv) elegancia, (xvi) creatividad, (xvii) utilidad, (xviii) fortaleza, (xix) profundidad, (xx) intuición. Tao presenta enfáticamente su lista "sin ningún orden particular" (ibíd., p. 1), y se esfuerza sobre todo en mostrar

de visión, inventividad conceptual, maestría técnica, tratamiento abstracto, habilidad calculatoria, amplitud del espectro de ejemplos, enlace profundo de lo global/abstracto con lo local/calculatorio, utilidad y aplicabilidad. La influencia de la escuela rusa[283] es particularmente palpable en el fantástico entronque entre visión geométrica, virtuosismo analítico y aplicabilidad física.

En buena medida, las ideas de Gromov se elevan sobre un complejo contrapunto entre redes refinadas de *desigualdades* y series de *invariantes* apropiados dentro de esas redes. Éste es el caso de las desigualdades triangular[284], isoperimétrica[285] y sistólica[286], y es el caso de muy diversos constructos *arqueales* como los volúmenes simplicial[287] y minimal[288], los L^2-invariantes, los invariantes homotópicos ligados a la geometría de las relaciones diferenciales parciales, los invariantes de Gromov-Witten, etc. La emergencia de estos últimos invariantes es particularmente interesante desde un punto de vista filosófico. Dada una variedad simpléctica, pueden definirse múltiples estructuras cuasi-complejas[289] sobre la variedad, que

---

la *correlacionalidad* de algunas de esas cualidades en trabajos matemáticos concretos de alto nivel. Así, para el matemático (ejemplo: Tao), importa más una *configuración sintética de buenas propiedades que se aglutinan coherentemente*, que una escala analítica bien ordenada y bien fundamentada de esas propiedades.

283 Gromov cursó el doctorado (1969) en la Universidad de Leningrado bajo Rochlin. Para la influencia de sus colegas soviéticos, véase Rémi Langevin, "Interview: Mikhael Gromov", en: Jean-Paul Pier (ed.), *Development of Mathematics 1950-2000*, Boston: Birkhäuser, 2000, pp. 1213-1227 (en particular, p. 1221). Entre 1974 y 1981, Gromov fue profesor en Stony Brook; desde 1981, es profesor permanente en el IHES. Aprovechando a Connes, Gromov y Kontsevich (entre otros), el IHES ha sabido perpetuar la gran tradición de la alta matemática abierta por Grothendieck.

284 Marcel Berger, "Rencontres avec un géomètre" (1998), en: Jean-Michel Kantor (ed.), *Oú en sont les mathématiques*, París: Vuibert/Société Mathématique de France, 2002, pp. 399-440. El texto de Berger enfatiza las desigualdades mencionadas (ibíd., p. 400).

285 Misha Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Boston: Birkhäuser, 1999 (apuntes de curso dictado por Gromov en París VII 1979-80; primera redacción en francés, M. Gromov, J. LaFontaine, P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, París: Cedic-Nathan, 1981; extensos complementos y apéndices para la edición en inglés). El capítulo 6, "Isoperimetric inequalities and amenability" (ibíd., pp. 321-349), estudia en detalle diversas formas de la desigualdad isoperimétrica, en la cual se acota el volumen de un subespacio compacto mediante el volumen de su frontera. Según Berger ("Rencontres...", op. cit., p. 415), la isoperimetría en dimensiones infinitas merece verse como una forma de "cirugía" geométrica.

286 Las secciones 4E+ ("Unstable systolic inequalities and filling") y 4F+ ("Finer inequalities and systoles of universal spaces") (ibíd., pp. 264-272) abordan directamente el tema. Las "sístoles" son volúmenes minimales de ciclos no homólogos a cero en la variedad riemanniana; un caso particular son las curvas mínimas no contraíbles.

287 Dada una variedad compacta, su *volumen simplicial* se define como el ínfimo de las sumas de coeficientes (reales) tales que la clase fundamental de la variedad es cubierta por sumas de esos coeficientes multiplicados por conjuntos simpliciales. El volumen simplicial resulta ser un invariante ligado a la geometría *en el infinito* de la variedad, y es de utilidad entonces para el estudio de las propiedades *asintóticas* de las variedades (Berger, "Rencontres...", op. cit., p. 412).

288 Dada una variedad compacta, su *volumen minimal* se define dentro de la clase de *todas* las estructuras riemannianas ligadas a la variedad, gracias a la métrica que menos realza el comportamiento local de las protuberancias de la variedad (Berger, "Rencontres...", op. cit., p. 413).

289 Dada una variedad M, una estructura cuasi-compleja sobre M es una sección J de la fibración $End(TM)$ (TM espacio tangente) tal que $J^2 = -Id$. Si la variedad M es una variedad compleja, la multiplicación por i define una tal estructura. Para detalles, véase

no tienen por qué corresponder a una variedad compleja; para intentar estudiar no obstante lo simpléctico/real mediante técnicas de la variable compleja, Gromov consigue superar la *obstrucción* introduciendo una nueva noción de curva *pseudo-holomorfa*, que se comporta magníficamente en el plano proyectivo complejo *n*-dimensional (dos puntos cualesquiera pueden conectarse mediante una curva pseudo-holomorfa apropiada); pasando luego a buscar *invariantes* para esas curvas, Gromov muestra que los espacios *moduli* de las curvas son compactos, y que puede realizarse entonces una teoría natural de la homología, que lleva a los invariantes de Gromov-Witten; en última instancia, los nuevos invariantes permiten distinguir, por un lado, toda una serie de variedades simplécticas que hasta entonces no habían podido ser clasificadas y, por otro lado, ayudan a modelar aspectos insospechados de la teoría de cuerdas[290].

De esta manera, un intento de tránsito (real-complejo), una obstrucción en el tránsito (multiplicidad de lo pseudocomplejo), una saturación parcial de la obstrucción (curvas pseudoholomorfas), una profundización arqueal detrás del nuevo concepto saturador (invariantes de Gromov-Witten), muestran que la matemática –muy lejos de querer "alisar" analíticamente las oscilaciones contradictorias de los fenómenos– *necesita esa topografía fuertemente quebrada* para su pleno desarrollo. De hecho, en un análisis brillante de este tipo de situaciones, Gromov ha señalado[291] que el "árbol de Hilbert" (conjunto de ramificaciones de la matemática), lejos de ser sencillamente planar y deductivo, se encuentra atravesado por objetos geométricos multidimensionales: *nodos exponenciales* (lugares del árbol con grandes oscilaciones ampliativas: número, espacio, simetría, infinitud, etc.), *nubes* ("guías", o pegamientos coherentes, como los núcleos geométricos a la Zilber, dentro de un árbol a priori desconectado por razones de complejidad y de indecidibilidad), *pozos locales* (lugares donde se "hunde" y se pierde la información matemática), etc.

El *estilo* geométrico de Gromov recoge (implícitamente) dos estrategias *sintéticas* propias de Grothendieck –una mirada global a clases de estructuras y una observación de propiedades a gran escala–, y las suplementa con una incisiva virtuosidad *analítica* comparativa, gracias a una *doble fragmentación y reintegración* de las redes de desigualdades en estudio. Gromov produce en efecto una nueva comprensión de la geometría riemanniana al contemplar la clase de *todas* las variedades riemannianas y al trabajar con *múltiples* métricas dentro de esa clase: al mover entonces

---

G. Elek, "The Mathematics of Misha Gromov", *Acta Math. Hungar.* 113 (2006): 171-185. El artículo de Elek –preparado en ocasión del otorgamiento del Premio Bolyai 2005 a Gromov (¡premio recibido anteriormente sólo por Poincaré, Hilbert y Shelah!)– constituye una excelente presentación técnica de la obra de Gromov.

290 En el modelo *A* de la teoría de cuerdas, seis dimensiones temporales se unen en una variedad simpléctica tridimensional y las "hojas de universo" se parametrizan como curvas pseudo-holomorfas sobre esa variedad. Los invariantes de Gromov-Witten están entonces ligados a profundos problemas físicos. El enlace de alta matemática y cosmología se refrenda una vez más por caminos inesperados.

291 Langevin, "Interview: Mikhael Gromov", op. cit., pp. 1213-1215.

las variedades y al encontrar adecuados invariantes relativos dentro de ese movimiento. En forma similar, sus trabajos en el ámbito de las relaciones diferenciales parciales se inscriben dentro de una *doble matriz* que permite efectuar asombrosos pegamientos a lo largo de dos ejes primordiales: sintético/analítico y global/local. En efecto, el *h*-principio[292] ("*h*-principle", *h* por homotopía) postula la existencia, en ciertos ámbitos geométricos, de deformaciones homotópicas entre secciones continuas de un haz (ligadas a correlaciones diferenciales locales que codifican las condiciones locales en una ecuación diferencial parcial) y secciones *holonómicas* del haz (ligadas a soluciones globales, mediante diferenciales globales). El trabajo monumental de Gromov en sus *Partial Differential Relations* consigue, exhibir la *ubicuidad* del *h*-principio en las áreas más remotas de la geometría (riqueza sintética del principio) y construir una multitud de métodos y prácticas locales para validar el *h*-principio en condiciones particulares (riqueza analítica).

La estructura de grupo, que rejuvenece en las manos de un Connes o un Zilber, parece gozar de infinitas vidas en las manos de Gromov. Su programa en *teoría geométrica de grupos* puede describirse como el intento de caracterización de los grupos finitamente generados, módulo cuasi-isometrías, es decir, módulo deformaciones "infinitesimales" de distancias tipo Lipschitz[293]. En ese programa, Gromov ha demostrado que muchas propiedades de los grupos resultan ser *invariantes* cuasi-isométricos; en particular, la *hiperbolicidad* (por palabras) de un grupo[294] es un tal invariante, con el cual se consigue caracterizar la *complejidad lineal* del problema de palabras asociado a un grupo[295]. Por otro lado, gracias a la definición de una *métrica* en el grafo de Cayley de un grupo finitamente generado, Gromov define una noción de "crecimiento polinomial" del grupo y estudia las correlaciones de ese crecimiento asintótico con propiedades clásicas: solubilidad, nilpotencia, subrepresentaciones de Lie, etc.[296]

---

292 Mikhael Gromov, *Partial Differential Relations*, New York: Springer, 1986.

293 Para los detalles técnicos, ver Elek, "The Mathematics of Misha Gromov", op. cit., pp. 181-182.

294 El ejemplo básico de un *grupo hiperbólico*, en el sentido de Gromov, es el grupo fundamental de una variedad arbitraria de curvatura negativa. La generalización de ciertas propiedades de triángulos "delgados" en un cubrimiento universal de esa variedad lleva a definiciones abstractas de hiperbolicidad (ibíd., p. 183).

295 Dado un grupo *G* presentado recursivamente, el *problema de palabras* ("*word problem*") asociado a *G* consiste en decidir si dos productos finitos de generadores de *G* (es decir, palabras en el grupo libre) coinciden, o no. Algunos grupos cuyo problema de palabras es *soluble* incluyen los grupos finitos y los grupos simples finitamente generados. Puede demostrarse que no existe una solución uniforme del problema para todos los grupos, y, por tanto, la *medición* de la complejidad del problema para ciertas clases de grupos resulta ser un resultado de gran interés. Gromov demuestra que la complejidad del problema de palabras de un grupo es lineal si y sólo si el grupo es hiperbólico. Gracias a una *métrica* en la clase de los grupos finitamente generados, se demuestra que la *clausura* de la subclase de los grupos hiperbólicos contiene "Monstruos de Tarski" (grupos infinitos tales que sus subgrupos no triviales son grupos cíclicos de orden p, para un primo p fijo; la existencia de tales grupos fue demostrada por Olshanskii (1980), con $p>10^{75}$: ¡un resultado que debe hacer soñar a los filósofos!)

296 Ibíd., pp. 183-184.

Nos encontramos así ante una situación muy típica en las matemáticas contemporáneas, donde *ciertos núcleos clásicos se ven como límites de deformaciones* (lógicas, algebraicas, topológicas, cuánticas) dentro de muy amplias clases de espacios. Gracias a estos grandes procesos sintéticos (al estilo de los "grupos por doquier" en Zilber, o de las "métricas por doquier" en Gromov), se recuperan los invariantes clásicos, pero se descubren también múltiples nuevos invariantes (estructuras *arqueales* en nuestra terminología) que una mirada restringida –local, analítica o clásica– *no* dejaba entrever.

Tercera Parte

Esbozos de síntesis

Capítulo 8

Fragmentos de una ontología transitoria

En esta tercera parte del trabajo, elaboraremos una reflexión (filosófica, metodológica y cultural) sobre los estudios de caso que hemos presentado en la segunda parte. Por tanto, en esta tercera parte, *cuando nos refiramos a las "matemáticas" (y a sus adjetivos derivados) estaremos entendiendo "matemáticas contemporáneas"*, a menos que específicamente se acote lo contrario. Debe entonces observarse, de entrada, que este ensayo no puede cubrir todas las formas de hacer matemáticas, y, en particular, no contempla las prácticas peculiares de las matemáticas elementales. No se pretende así producir una suerte de filosofía matemática omniabarcadora, sino, más bien, *llamar la atención sobre un muy amplio espectro matemático que rara vez ha sido tenido en cuenta en las discusiones filosóficas,* y que no debería seguirse evitando. En el último capítulo intentaremos proveer una caracterización intrínseca de la diacronía 1950-2000 (abierta en los extremos) referente a las "matemáticas contemporáneas", pero, por el momento, solo nos basaremos en los casos concretos de la práctica matemática revisados en la segunda parte. Intentaremos dar un extenso número de referencias cruzadas a esos estudios de caso; para ello, *utilizaremos sistemáticamente referencias entre paréntesis cuadradas del tipo* [*x*]*,* [*x-y*] *o* [*x*, *y*, ...] *en el cuerpo del texto*, que enviarán a las páginas *x*, *x-y* o *x*, *y*, ... de nuestro ensayo.

Los estudios de caso de la segunda parte deben haber dejado claro que la matemática contemporánea se ocupa incesantemente de *procesos de tránsito* dentro del pensamiento exacto, con múltiples *redes de contrastación*, tanto interna como externa, para esos procesos. De allí resulta inmediatamente que las preguntas sobre el contenido y el lugar de los objetos matemáticos –el "qué" y el "dónde" ontológicos– con los cuales pretendemos describir y situar esos objetos, no pueden tener respuestas absolutas y *no pueden fijarse* por adelantado. La *relatividad* del "qué" y del "dónde" son imprescindibles en las matemáticas contemporáneas, en las que todo tiende a ser transformación y fluxión. En ese sentido, el gran paradigma de la obra de Grothendieck, con su concepción profunda de una matemática relativa [81] entreverada por toda suerte de cambios de base dentro de topos muy generales [81-82], merece entenderse plenamente como un “giro einsteiniano” en la matemática. Como hemos visto, se trata de una visión que se ramifica en toda la matemática de la época, y que puede dar lugar también a un verdadero *giro einsteiniano en la filosofía de la matemática*.

Ahora bien, el interés de la teoría de la relatividad de Einstein consiste, una vez asumido el movimiento de los observadores, en encontrar adecuados invariantes (ya no euclidianos o galileicos) detrás de ese movimiento. Similarmente, el interés de una matemática relativa a la Grothendieck consiste, una vez asumido el tránsito de los objetos matemáticos, en encontrar adecuados invariantes (*ya no elementales o clásicos*) detrás de ese tránsito. Este es el caso de múltiples situaciones *arqueales* dentro de la matemática que hemos venido revisando: motivos [83], teoría pcf [114], alegorías intermedias [138], alternativa extendida de Zilber [145], *h*-principio [149], etc. Un relativismo escéptico, que lleve a la desorientación y que permita una isotropía de los valores, al estilo de algunos subrelativismos posmodernos o del mal afamado *pensiero debole*, se encuentra entonces muy alejado de los proyectos einsteiniano o grothendickiano, donde, aunque no puedan existir fundamentos absolutos u objetos fijos, no todo resulta ser equiparable o equivalente, y donde pueden calcularse *estructuras arqueales correlativas* –es decir, invariantes con respecto a un contexto dado y a una serie dada de correlaciones– que permiten justamente detectar y *reintegrar las diferencias*.

El primer punto de importancia en la especificación del “qué” son los objetos matemáticos consiste en *tomarse realmente en serio* la relatividad y el tránsito dentro de la matemática contemporánea. En este ámbito, los objetos dejan de ser fijos, estables, clásicos, bien fundamentados –en suma “unos”– y se acercan, más bien, a lo movible, lo inestable, lo no clásico, lo fundamentado solo contextualmente–en suma lo “múltiple”–. La *multiplicidad* subyace por doquier en el tránsito contemporáneo, y los objetos de la matemática se convierten básicamente en *redes y procesos*. No existen “entes” determinados, sólidamente situados en *un* universo absoluto, firme y rocoso, sino, más bien, *redes sígnicas complejas* que se entrelazan entre sí en *diversos* universos relativos, plásticos y fluidos. Esas “redes sígnicas complejas”, en las que se constituyen los objetos matemáticos, contemplan una multitud de niveles, y *ningún nivel fijo determinado agota la riqueza del objeto (red)*.

Esto es claro, por ejemplo, con el “objeto” matemático *grupo*; hemos visto cómo ese objeto aparece y captura información dispar (bajo los más diversos teoremas de representación) en los ámbitos más distantes de la matemática: grupos de homología y cohomología [82-84, 102], grupos de Galois [86, 88, 128], acciones de grupos [92, 103], grupos abelianos [93], grupos de homotopía [101], grupos algebraicos [105], grupo de Grothendieck-Teichmüller [128, 132], grupos de Lie [127], grupos cuánticos [127], grupos de Zilber [144], grupos hiperbólicos [149], etc. No es que nos enfrentemos entonces aquí, ontológicamente, con una estructura universal de grupo que se someta a propiedades suplementarias en cada supuesto nivel de lectura (lógico, algebraico, topológico, diferencial, etc.), sino, más bien, lo que sucede es que las diversas redes de información matemática codificadas bajo la estructura de grupo *se traslapan ("pre-síntesis") y se componen ("síntesis") para transmitir coherentemente la información*. No es que exista "un" objeto matemático sólido que pueda cobrar vida independientemente de los demás, en un supuesto universo primordial, sino, más bien, existen (pluralmente) *redes que evolucionan incesantemente a medida que se conectan* con nuevos universos de interpretación matemática. Esto es particularmente patente en las redes de desigualdades [147] que estudia Gromov, o en las redes equideductivas de teoremas [140] que ha evidenciado Simpson; los progresivos avances y adelantos en las redes van configurando el panorama global, y este *modifica a su vez* los entes localmente internalizados dentro del entorno global.

Dado que los objetos de la matemática no "son" *sumas estables* sino *reintegraciones de diferenciales relativos*, la pregunta acerca de su situación ("dónde viven") adquiere un cariz casi *ortogonal* al planteamiento de esa misma pregunta desde una perspectiva analítica (fundamentada en la teoría de conjuntos). En efecto, si la matemática se encuentra en permanente tránsito y evolución, la situación de un objeto no puede ser más que relativa, con respecto a un ámbito ("geografía") y con respecto al momento de evolución de ese ámbito ("historia"). Esto no hace más que refrendar la posición de Cavaillès –comprensión de la matemática como *gestualidad*–, la cual se repite a lo largo del siglo hasta llegar a Gromov, quien señala cómo, en el árbol de Hilbert [148], debe llegar a "admitirse la influencia de factores históricos y sociológicos"[297] en su evolución.

La lectura de la matemática como una ciencia *histórica* va en contravía, por supuesto, de las lecturas propuestas en la filosofía analítica de las matemáticas. En esas lecturas, intemporalmente, emergen fragmentos de edificación sobre *trasfondos de absoluto*, codificados en los diversos "ismos" analíticos [60], con los cuales cada comentador pretende socavar posiciones contrarias y proponer su versión como la más "adecuada", es decir, como la más potencialmente resolutiva de las problemáticas en juego. Sin embargo, curiosamente, las supuestas *reconstrucciones lógicas* de la "matemática" –cientos de veces estudiadas en los textos analíticos– van *claramente en contra* de lo que la lógica matemática ha estado descubriendo en el periodo 1950-2000. De hecho, hemos visto cómo –en la estela de Tarski (lógicas como fragmentos de álgebras y de topologías) y de Lindström (lógicas como sistemas de coordenadas de clases de modelos)– los más eminentes lógicos matemáticos de las últimas dos décadas del siglo XX (Shelah, Zilber, Hrushovski) han resaltado la emergencia de profundos núcleos geométricos subyacentes [111, 143] detrás de las manipulaciones lógicas.

297 Langevin, "Interview: Mikhael Gromov", op. cit., p. 1214.

Al igual que Jean Petitot –en sus *estudios mixtos*[298] sobre neurogeometría, variedades riemannianas y lógica de los haces (Petitot se declara gran admirador de los "mixtos" de Lautman)– ha empezado a defender la idea de proto-objetos geométricos subyacentes en la actividad neuronal, y, por tanto, la *precedencia heurística de una proto-geometría sobre un lenguaje*, la lógica matemática contemporánea ha venido demostrando también una *precedencia necesaria de una proto-geometría sobre una lógica*. Se trata de una situación que lleva entonces a *girar* completamente, de nuevo en forma casi ortogonal, las aproximaciones usuales de la filosofía analítica.

Dentro de la matemática contemporánea, y siguiendo la "doble ortogonalidad" que hemos señalado, los objetos no "son", sino que *están siendo*, y estas ocurrencias no se sitúan dentro de una urdimbre lógica, sino dentro de un espectro inicial de *proto-geometrías*. Las consecuencias para una ontología de las matemáticas son inmensas y radicalmente innovadoras. Por un lado, desde un punto de vista internalista, el "qué" involucra redes y tránsitos evolutivos, mientras el "dónde" involucra estructuras arqueales proto-geométricas anteriores a la lógica misma. Por otro lado, desde un punto de vista externalista, el "qué" remite a la presencia inesperada de esas proto-geometrías en el mundo físico (acciones del grupo de Grothendieck-Teichmüller sobre las constantes universales de la física [128, 132], índice de Atiyah [119], semigrupo de Lax-Phillips [124], enlace de la pseudo-analiticidad de Zilber con los modelos físicos de la geometría no conmutativa [145], etc.), mientras que el "dónde" esconde una profunda dialéctica de correlaciones relativas entre los fenómenos concretos y sus representaciones teóricas. De hecho, de estas lecturas se desprende que las preguntas acerca de un "qué" o un "dónde" absolutos –con cuyas respuestas se describirían y se situarían supuestamente, de una vez por todas, los objetos matemáticos (ya sea en un mundo de "ideas", o en un mundo físico "real", por ejemplo)– son *preguntas mal planteadas*.

La riqueza de la matemática en general (y de la matemática contemporánea en particular) consiste precisamente en *liberar* y *no acotar* los universos de vivencia y de influencia de sus objetos. En cierto sentido, una *base* para poder entender mejor la imprescindible *transitabilidad* de la matemática podría proveerse gracias a la mixtura de *(i) estructuralismo, (ii) categorías* y *(iii) modalización* propuesta por Hellman [62], pero, en realidad, la situación es aún más compleja, como se desprende de las múltiples oscilaciones, jerarquizaciones y ramificaciones que hemos puesto de relieve en la segunda parte de este trabajo. De hecho, si una lectura categórica *(ii)* dentro de las matemáticas contemporáneas parece imprescindible –lo que hemos refrendado con múltiples estudios de caso

298 Véase Jean Petitot, "Vers une neuro-géométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines* 145 (1999): 5-101, o "The neurogeometry of pinwheels as a subriemannian contact structure", *Jour. Physiol.* 97 (2003): 265-309. Su notable tesis doctoral (*Pour un schématisme de la structure*, EHESS 1982, 4 vols.; parte en *Morphogenèse du sens*, París: PUF, 1985) no ha sido aún aprovechada en filosofía matemática.

detrás de los cuales subyace, explícita o implícitamente, el programa categórico y relativista grothendickiano–, y si, a partir de cierto umbral de complejidad, la modalización matemática *(iii)* parece igualmente imprescindible (*tránsito multiforme* entre hipótesis, modelos, cálculos y contrastaciones, cuidadosamente oculto en la formalización de la teoría clásica de conjuntos, y cuidadosamente ignorado por tanto en las corrientes "duras" de la filosofía analítica de las matemáticas), las matemáticas contemporáneas resaltan en cambio la importancia de los *procesos* por encima de la estructuras *(i)*, ya que estas emergen en un *segundo nivel* como invariantes de procesos adecuados. La ontologización relativa de los objetos en las matemáticas contemporáneas fuerza entonces a *dinamizar* aún más la base de Hellman (que aparece fijada en un cuadrante del cuadrado de Shapiro [14]) para poder dar mejor cuenta de los procesos contemporáneos.

En el fondo, al mirar la matemática contemporánea, no podemos entonces escapar de cierta "ontología transitoria" que, en ciernes, terminológicamente, *parecería* autocontradictoria. Sin embargo, aunque el griego *ontotetês* envía, en las traducciones latinas, a un "ente" y a una "esencia" supuestamente intemporales, que la "ontología" estudiaría[299], no hay razón (más allá de la tradición) para creer que esos entes o esencias deban ser absolutos y no *asintóticos*, *gobernados por pegamientos parciales en una evolución correlativa bimodal*, tanto del mundo, como del conocimiento. Los soportes filosóficos de esa "ontología transitoria" se encuentran en la teoría del *desliz* de Merleau-Ponty[300] (en el ámbito general del conocimiento y en el ámbito particular de la visualidad), y en la específica *ontología transitoria* propuesta por Badiou[301] (en el ámbito de la matemática). Para Merleau-Ponty, el "punto más alto de la razón"[302] consiste en *sentir el desliz del suelo*, en detectar el movimiento de nuestras creencias y de nuestros supuestos saberes: "cada creación cambia, altera, esclarece, profundiza, confirma, exalta, recrea o crea por adelantado todas las demás". Un complejo y movible tejido de la creación surge de su mirada, lleno de "giros, transgresiones, solapamientos y empujes súbitos", y en las capas sedimentarias contradictorias emerge toda la fuerza de la creación. Es exactamente lo que hemos venido detectando en la matemática contemporánea, tal como la presentamos en la segunda parte del trabajo. Para Badiou, la matemática es un "cuasi-pensamiento de un cuasi-ser" *distribuido* en "cuasi-objetos"[303] que reflejan *estratos*

---

299 Jean-François Courtine, "Essence", en: Barbara Cassin (ed.), *Vocabulaire européen des philosophies*, París: Seuil, 2004, pp. 400-414.

300 Véanse Maurice Merleau-Ponty, *Notes des cours du Collège de France* (1958-59, 1960-61), París: Gallimard, 1996; *L'oeil et l'esprit* (último texto publicado en vida, 1961, magnífico lugar para introducirse en la obra de Merleau-Ponty), París: Gallimard, 1964; y sus dos grandes trabajos póstumos, *La prose du monde*, París: Gallimard, 1969; *Le visible et l'invisible*, París: Gallimard, 1964. El hiato entre lo visible y lo invisible solo puede entenderse deslizándose en él.

301 Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, op. cit. (ver nuestra nota 6).

302 Merleau-Ponty, *Notes des cours*... op. cit., p. 92.

303 Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, op. cit. pp. 42-43.

de conocimiento y de mundo, y cuyas *correlaciones simples* (armónicas, estéticas) *crecen* en el tiempo. Esos *cuasi*-objetos no solo escapan entonces a identidades determinadas y fijadas: más aún, evolucionan y se *distribuyen* entre urdimbres de idealidad y de realidad. A lo largo de las decenas de situaciones que hemos registrado en la segunda parte del trabajo, hemos podido evidenciar de hecho *la distribución, el entronque y el pegamiento* de esos cuasi-objetos no solo entre fragmentos internos de la matemática, sino entre la matemática teórica (ámbito de lo *eidal*) y el mundo físico concreto (ámbito de lo *quiddital*).

La ontología transitoria de Badiou permite, con nuevas perspectivas y con nueva fuerza, reintroducir un *Platón no trivializado* en el panorama de la filosofía matemática. A la estela del *platonismo dinámico* de Lautman –atento a la composición, jerarquización y evolución de los "mixtos" en el *Filebo*[304]–, Badiou insiste también en un platonismo esencialmente *abierto* a una "co-pertenencia de lo conocido y del espíritu conocedor", de donde se deriva una "conmensurabilidad ontológica"[305] que incorpora el movimiento y el tránsito. Nos sumergimos, por tanto, en un platonismo no estático, no fijado en un supuesto mundo trascendente de Ideas, y muy alejado de la imagen usual con la que se resume a la doctrina[306]. La lectura platonista dinámica de Badiou abre perspectivas filosóficas enteramente distintas –particularmente, una comprensión de la matemática como *pensamiento*[307] evolutivo y un estudio de los problemas de *saturación, maximización e invarianza* dentro de los movimientos del pensamiento– que caen en el *orden asintótico del "desliz"* según Merleau-Ponty, y que cubren algunas de las problemáticas hondamente matemáticas que pudimos resaltar en los estudios de caso de la segunda parte de este ensayo.

El *estar siendo, conmensurablemente entre las redes de la cognición y las redes de los fenómenos*, es una característica fundamental de una "ontología transitoria" *requerida* por las matemáticas contemporáneas. Se trata de un *cambio aparentemente inocuo de categoría gramatical* en los planteamientos ontológicos, que proporciona sin embargo toda una nueva dimensionalidad y enriquece las problemáticas en juego: el "qué" y el "dónde" –abordados en primera instancia en un presente, absoluto y actual, que lleva a enunciar problemas mal planteados– pasan a entenderse en un *presente perfecto, relativo y modal.* La consecuencia mayor de esta

---

304 Lautman, *Essai sur l'unité*... op. cit., pp. 143-147, 203, 227-228, 303. Véase Nicolas-Isidore Boussolas, *L'Être et la composition des mixtes dans le Philèbe de Platon*, París: PUF, 1952.

305 Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, op. cit. p. 96.

306 Es el caso de la "trivialización" presentada por Benacerraf: "los platonistas son aquellos que consideran a las matemáticas como el *descubrimiento* de verdades sobre estructuras que existen independientemente de la actividad o del pensamiento de los matemáticos", en: Benacerraf & Putnam, *Philosophy of Mathematics*, op. cit., p. 18.

307 Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, op. cit. pp. 39-54, 102. La matemática como "pensamiento" estudia las transiciones exactas del ser y se acerca a una *gestualidad* (Cavaillès, Châtelet) transformadora/productora de información *no trivial.* Es una posición muy alejada de un entendimiento de las matemáticas como mero juego de lenguaje, o como conjunto de transiciones deductivas tautológicas.

apertura hacia el tránsito consiste en romper inmediatemente los dualismos y los encasillamientos en la tabla de Shapiro [14]. Tal como hemos visto, los objetos –es decir, en realidad, los procesos o los cuasi-objetos– de la matemática *transitan sin cesar entre redes eidales, quidditales y arqueales*, ya sea en el mundo matemático interior, ya sea en su permanente contrastación con la física exterior. Lo que dentro de un contexto resulta *eidal* (Grothendieck-Teichmüller (*GT*) ligado a los números de Euler [128], por ejemplo), en otro contexto aparece como *quidditál* (*GT* actuando sobre las fórmulas universales de la física [132]), y, aún, en otro contexto aparece como *arqueal* (*GT* en los dibujos de niños [128]).

Las disociaciones y las exclusiones clásicas (del tipo *o...o...*, al estilo del dilema de Benacerraf [15]) han hecho excesivo e innecesario daño en la filosofía de las matemáticas, y es tiempo de empezar a superarlas. Para ello, contamos ya con al menos tres grandes tendencias dentro de las matemáticas contemporáneas –donde se rechazan los posicionamientos binarios y donde se abren perspectivas de continuidad entre redes diversas– que merecen empezar a ser seriamente consideradas en la reflexión filosófica: *(i)* la comprensión de lo "positivo" (clásico, conmutativo, lineal, elemental, estructurado, etc.) como *límite* de mediaciones "negativas" (intuicionismo, no conmutatividad, no linealidad, no elementalidad, cuantización, etc.); *(ii)* la teoría de *haces*, con sus manejos continuos de coherencia y pegamiento entre lo local y lo global; *(iii)* la teoría matemática de *categorías*, con sus manejos de diferenciación y reintegración entre lo particular y lo universal. En lo que sigue, desbrozaremos, desde una perspectiva conceptual y filosófica, estas tres hondas tendencias técnicas, y explicaremos cómo permiten *reforzar* una ontología transitoria de las matemáticas.

Habíamos señalado, dentro de las características específicas de las matemáticas 1950-2000, el hecho de trabajar con la *fluxión* y la *deformación* de los linderos usuales de las estructuras [31]. Esto es patente, por ejemplo, en la K-teoría de Grothendieck [78-79, 119-120], donde se estudian las perturbaciones de morfismos sobre fibras clásicas; en las clases elementales abstractas de Shelah [111-113], donde se estudian límites de invariantes algebraicos más allá de la lógica clásica de primer orden; en el semigrupo de Lax-Phillips [124], donde la geometría no euclídea permite entender el *scattering* de las ondas; en la geometría no conmutativa de Connes [125-127], donde se devela la dispersión y la fluxión en mecánica cuántica y en termodinámica; en las cuantizaciones de Kontsevich [131-132], donde las estructuras clásicas se obtienen como límites de las cuantizadas; en las alegorías de Freyd [137-138], donde los topos se ven como límites de categorías intermedias; en la alternativa extendida de Zilber [145], donde los contraejemplos a la tricotomía surgen como deformaciones vía grupos no conmutativos; o en la teoría de grupos a gran escala de Gromov [149], donde se estudia el comportamiento asintótico no lineal de los grupos finitamente generados. Son todos ejemplos de *alta* matemática, con *grandes contenidos conceptuales y concretos* (lejos por tanto de poder reducirse a meros "juegos de lenguaje"), en los que se demuestra una nueva comprensión de los (cuasi-)objetos matemáticos, gracias a fluxiones, deformaciones y límites, pasando por estratos intermedios no "positivos" (no clásicos, no conmutativos, no lineales, no elementales, cuantizados).

Un resultado de Caicedo[308] demuestra que *la lógica clásica en una fibra "genérica" de un haz de estructuras de primer orden no es más que un límite adecuado de la lógica intuicionista en las fibras "reales" del haz*. Esta notable situación muestra que las construcciones de lo clásico y lo positivo como "idealizaciones límite" exhibidas en los ejemplos *matemáticos* anteriores, se reflejan también, exactamente de la misma manera, en el ámbito de la *lógica*. Una vez más, emerge entonces la *continuidad del saber matemático*, donde no valen los compartimientos estancos. La riqueza de la lógica de los haces de Caicedo se debe precisamente a su elaboración en una *franja intermedia* entre modelos de Kripke[309] y topos de Grothendieck [81-82], aprovechando los muchos ejemplos concretos de los primeros y los conceptos generales abstractos de los segundos. En un *cruce pleno de técnicas algebraicas, geométricas, topológicas y lógicas*, Caicedo construye un instrumentario que incita al tránsito y a la transferencia. El resultado es su teorema "fundamental" de la teoría de modelos, donde enunciados centrales en lógica como el teorema de Loz para ultraproductos, el teorema de completitud de la lógica de primer orden, construcciones de forcing en conjuntos, teoremas de omisión de tipos en fragmentos de lógica infinitaria, pueden verse todos, uniformemente, como construcciones de estructuras genéricas en haces adecuados.

De lo anterior se deriva una consecuencia impactante desde un punto de vista filosófico. En efecto, a través de las fluxiones y el tránsito, observamos que *las perspectivas clásicas no son más que idealidades, reconstruibles como límites de perspectivas no clásicas mucho más reales*. Un caso particular de esta situación es una nueva comprensión sintética de la dialéctica punto-vecindad, donde –contrariamente a la perspectiva analítica conjuntística donde las vecindades se construyen a partir de puntos– los "puntos" ideales clásicos, *nunca vistos* en la naturaleza, se construyen como límites de

308 Xavier Caicedo, "Lógica de los haces de estructuras", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XIX (74) (1995), 569-585. Se trata de una armazón de gran profundidad y amplitud –matemática, lógica, conceptual y filosófica–, desafortunadamente aún desconocida por la comunidad internacional. Caicedo anuncia (2007) una próxima presentación en inglés. Para una visión parcial en italiano, véase Fernando Zalamea, "Ostruzioni e passaggi nella dialettica continuo/discreto: il caso dei grafi esistenziali e della logica dei fasci", *Dedalus. Rivista di Filosofia, Scienza e Cultura - Università di Milano* 2 (2007): 20-25.

309 Los *modelos de Kripke* son "árboles" donde puede representarse una evolución ramificada del tiempo; desde un punto de vista matemático, son sencillamente *prehaces* sobre un conjunto ordenado (visto como categoría). Los modelos de Kripke sirven de semántica completa para la lógica *intuicionista*. Otras semánticas completas para el intuicionismo están dadas por la clase de los espacios topológicos, o por la clase de los topos elementales [111]. De esta manera, intuicionismo y continuidad se enlazan sobre un fondo *arqueal*, y emerge una nueva forma de la aporía de Thom: clásico-discreto *versus* intuicionista-continuo. Esta nueva aparición del intuicionismo, desligada de su vertiente constructivista inicial, no ha sido aún suficientemente aprovechada dentro de la filosofía de las matemáticas.

vecindades reales no clásicas, ligadas en cambio a *visibles* deformaciones físicas. Desde esta perspectiva, la ontología de los (cuasi-)objetos en juego realiza de nuevo otro giro radical: una ontología "analítica", ligada al estudio de clases de puntos conjuntistas, no puede ser sino una *ficción idealizada*, que *olvida* una ontología "sintética"/"transitoria" subyacente, mucho más real, ligada al estudio de vecindades continuas contrastables dentro de la física. Los (cuasi-)objetos transitorios y continuos de la matemática no clásica se *entrelazan* entonces con los fenómenos transitorios y continuos de la naturaleza, a través de redes de correlación informativa gradual, no binaria, no dicotómica.

Los paradigmas principales de la *teoría de haces*[310] confirman esta situación. La antigua problemática filosófica "¿cómo pasar de lo múltiple a lo uno?" (correspondiente a un tránsito fenomenológico) se convierte en la problemática matemática "¿cómo pasar de lo local a lo global?" (tránsito técnico), que se subdivide a su vez en las preguntas *(a)* "¿cómo registrar diferencialmente lo local?" y *(b)* "¿cómo integrar globalmente esos registros?" Al abordar *analíticamente* la pregunta *(a)* surgen los conceptos matemáticos naturales de vecindad, cubrimiento, coherencia y pegamiento, mientras que, al abordar *sintéticamente* la pregunta *(b)* surgen los conceptos matemáticos naturales de restricciones, proyecciones, preservaciones y secciones. Los prehaces (término debido a Grothendieck) cubren la combinatoria de enlaces *discretos* vecindad/restricción y cubrimiento/proyección, mientras que los haces cubren la combinatoria *continua* ligada a las duplas coherencia-preservación y pegamiento-sección (*figura 13*). De esta manera, el *concepto general de haz* es capaz de integrar una red profunda de correlaciones donde se incorporan aspectos tanto analíticos como sintéticos, tanto locales como globales, tanto discretos como continuos.

---

310 Los haces emergen en la obra de Jean Leray, en el estudio de índices y coberturas para ecuaciones diferenciales (trabajos en el Oflag XVII, artículos 1946-50; primera aparición del término "haz", 1946). En el ámbito general del estudio de una variedad mediante sus proyecciones en variedades de dimensiones inferiores (Picard, Lefschetz, Steenrod), surge la problemática del estudio de la topología de la variedad inicial gracias a la información coherente de las fibras en la proyección, y los haces ayudan precisamente a capturar (y pegar) la *variación* continua en las fibras. En el Seminario Cartan de la *École normale supérieure* (1948-51) se decantan las ideas de Leray y se presentan las versiones actualmente conocidas de los haces: como espacio fibrado, o "espace étalé" según la terminología de Lazard (a no confundir con la noción de "étale" según Grothendieck: conceptos casi exactamente opuestos distanciados por una sola tilde, el primero ramificado, el segundo *no* ramificado), y como haz de gérmenes de secciones. Godement unifica conceptos y terminología en su *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* (1958), paralelamente al *Tohoku* de Grothendieck [91-93]. Para una historia detallada de la teoría de haces, véanse John Gray, "Fragments of the history of sheaf theory", en: *Lecture Notes in Mathematics* 753, New York: Springer, 1979, pp. 1-79, y Christian Houzel, "Histoire de la théorie des faisceaux", en: *La géométrie algébrique*, París: Albert Blanchard, 2002, pp. 293-304. En nuestro capítulo final situaremos la aparición de la teoría de haces como *concreción de un corte conceptual profundo* entre las matemáticas modernas y las matemáticas contemporáneas, e intentaremos mostrar que el corte diacrónico alrededor de 1950 no es solo una casualidad histórica.

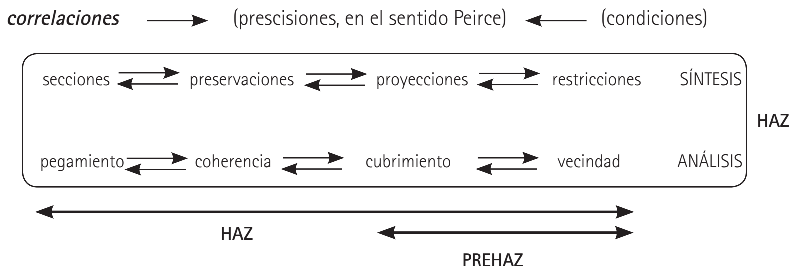

Figura 13. *El concepto de haz. Transitoriedad general análisis/síntesis, local/global, discreto/continuo*

Al "prescindir"[311] la noción fundamental de "pegamiento" en el haz, surgen *progresiva y necesariamente* las nociones de coherencia, cubrimiento y vecindad. Estas dos últimas nociones son de suma importancia en una discusión ontológica. Por un lado, si resulta, como hemos venido detectando, que lo "real" no puede anclarse en un absoluto, y si lo "real" solo puede entenderse entonces a través de *condiciones asintóticas*, las estrategias de *cubrimiento* de fragmentos de lo real adquieren un valor ontológico central. En este sentido, debemos recordar las exhortaciones de Rota a escapar de la "comedia de la existencia" de los objetos matemáticos instaurada por la filosofía analítica, y a estudiar, más bien, una "primacía de la identidad"[312] ligada a un entronque de *cubrimientos modales de lo real* que permite clasificar las identidades posibles entre ideas y objetos físicos, identidades que evolucionan –y en los casos más interesantes permanecen invariantes– en periodos a gran escala (recuérdese aquí a Gromov). Por otro lado, un giro hacia una *lógica real de vecindades*, en contrapunto con una lógica puntual ideal –es decir, un giro hacia una *lógica de los haces* en contrapunto con la lógica clásica– lleva también a un giro ontológico radical. Muchas de las supuestas exclusiones clásicas y analíticas se quedan entonces sin piso, en entornos sintéticos, tanto físicos como cognitivos, donde las mediaciones son ley. En particular, dentro de esos ámbitos sintéticos/transitorios/continuos, la pregunta disyuntiva entre la "idealidad" *o* la "realidad" de los (cuasi-)objetos matemáticos no tiene por qué ser respondida mediante una exclusión [13-16], como se refleja en los compartimientos estancos de la tabla de Shapiro [14]. Los haces, en concreto, *(cuasi-)objetos imprescindibles de la matemática contemporánea*, adquieren toda su riqueza gracias a su *doble* estatuto ideal/real, analítico/sintético, local/global, discreto/continuo; la

---

311 La "prescisión", en el sentido de Peirce, permite el paso de lo particular a lo general, *escindiendo* lo más abstracto de lo más concreto. Es un procedimiento ubicuo en matemáticas, que ocurre también en el paso de lo múltiple a lo uno, es decir, en la búsqueda fenomenológica de categorías universales. Las *tres categorías cenopitagóricas peirceanas* (primeridad: inmediatez; segundidad: acción-reacción; terceridad: mediación) surgen en cuidadosas dialécticas de prescisión. Para un estudio detallado de esas dialécticas –ligadas a "tensiones bipolares" similares a las que se descubren en las *adjunciones* de la teoría (matemática) de categorías– véase De Tienne, *L'analytique de la répresentation...*, op. cit.

312 Rota, *Indiscrete Thoughts*, op. cit., pp. 184-186.

inclusión (y no la exclusión)[313] entre los opuestos –ejercicio incesante de mediación– asegura su fuerza técnica, conceptual y filosófica.

La teoría de categorías axiomatiza *regiones* de la práctica matemática, de acuerdo con las similaridades estructurales de los objetos en juego y con los modos de transmisión de información entre esos objetos, en sintonía con el pragmaticismo peirceano [64-68], igualmente sensible a los *problemas de transferencia*. Inversamente a la teoría de conjuntos, donde los objetos son analizados en su interior como un conglomerado de elementos, la teoría de categorías estudia los objetos por su comportamiento *sintético externo*, gracias a las *relaciones* del objeto con su entorno. Un morfismo es *universal* con respecto a una propiedad dada si su comportamiento con respecto a los demás morfismos similares de la categoría posee ciertas características de unicidad que lo distinguen dentro del entorno categórico. Las nociones básicas de la teoría de categorías asociadas a la universalidad –las nociones de *objeto libre* y de *adjunción*– responden a problemáticas ligadas a la búsqueda de *arquetipos relativos y de dialécticas relativas*. Dentro de la multiplicidad, en el espectro ancho y variable de las regiones de la matemática, la teoría de categorías logra encontrar ciertos patrones de universalidad que permiten adelantar procesos de desgajamiento de lo local y de superación de los particulares concretos. Por ejemplo, en una categoría, un objeto libre puede proyectarse en *cualquier* objeto de subclases adecuadamente amplias de la categoría: se trata entonces de una suerte de *signo primordial*, que encarna en todos los contextos de interpretación correlacionados. Allende las localizaciones relativas, surgen así ciertos *universales relativos* que han dado todo un nuevo impulso técnico a las nociones clásicas de universalidad. Aunque no podemos ya situarnos en un pretendido absoluto, ni creer en conceptos uniformemente estables en el tiempo y en el espacio, la teoría de categorías ha *redimensionado las nociones de universalidad*, acoplándolas a una serie de transferencias relativas de lo universal-libre-genérico, donde, permitiéndose el *tránsito*, vuelven a encontrarse notables *invariantes* detrás del mismo.

De esta manera, la teoría de categorías explora la estructura de ciertos *entes genéricos* (“generals”) en una vía similar a la del “realismo escolástico” del último Peirce. En efecto, el pensamiento categórico contempla una dialéctica entre definiciones universales en categorías abstractas (morfismos genéricos) y realizaciones de esas definiciones universales en categorías concretas (clases de conjuntos con estructura), y, dentro de las categorías abstractas, pueden entenderse morfismos que son *universales reales*, aunque no sean existentes (es decir, que no encarnan en categorías concretas: piense, por ejemplo, en un objeto inicial, definible en categorías abstractas, pero cuya realidad no encarna en la categoría de conjuntos

313 Rota expresa claramente la urgencia de no adoptar exclusiones *a priori*: “Los ítems matemáticos pueden verse como enunciados analíticos derivados dentro de un sistema axiomático, o como hechos acerca del mundo natural, al igual que en cualquier otra ciencia. Ambas afirmaciones son igualmente válidas. [...] El sentido contextual analítico o sintético de un ítem no está fijado”. Ibíd., p. 168.

infinitos, donde no existen objetos iniciales). La ontología transitoria de los (cuasi-)objetos matemáticos se abre entonces a una *jerarquía intermedia* de modos de universalidad y de modos de existencia, allende demarcaciones binarias restrictivas. En particular, como lo ha señalado Lawvere, los objetos de los topos elementales (donde se encuentran los prehaces y haces) [111] merecen verse como *conjuntos variables*, con modos de pertenencia fluctuantes a lo largo del tiempo. La transitoriedad ontológica de estos "entes" no puede ser más patente.

En el espectro de las posibilidades puras, la máxima pragmaticista peirceana [64-68] tiene que enfrentarse con la idea de conceptos universales, lógicamente correctos, pero que pueden no encarnar adecuadamente en contextos acotados de existencia. El pensamiento de la teoría matemática de categorías recupera este tipo de situaciones con alta precisión. Siguiendo, por ejemplo, tendencias en álgebra universal y teoría abstracta de modelos, la teoría de categorías ha podido definir nociones muy generales de *semánticas relativas universales* como invariantes apropiados de clases de lógicas dadas. Por tanto, detrás de la multiplicación de los sistemas lógicos y de las variedades de la verdad, permanecen ciertos patrones universales. De hecho, detrás del *ir y venir* de la información matemática, el *control de esas transferencias* de información (vía funtores, transformaciones naturales, adjunciones, equivalencias, etc.) constituye una de las razones cruciales del pensamiento categórico. Un fino cálculo técnico sobre las adjunciones da lugar a diversos *sistemas complejos de pegamiento* entre los objetos matemáticos y permite entender mejor la "aporía fundamental de las matemáticas" según Thom.

Desde un punto de vista pragmaticista, podemos ampliar nuestra concepción de la lógica y abrirnos a un retículo de *flujos parciales de verdad* sobre un *fondo sinequista* ("*synechés*": lo pegado, lo continuo; "sinequismo": continuidad operativa en el ámbito de la naturaleza, hipótesis de la arquitectónica peirceana). Esto sucede, de hecho, en el lema de Yoneda [139], donde, al intentar capturar una realidad dada (la categoría C, o, equivalentemente, sus funtores representables), la *emergencia forzosa* de objetos ideales (funtores *no* representables) *amplía necesariamente* los cauces de flujo de los funtores en juego. La ampliatividad ideal-real constituye uno de los puntos fuertes de una ontología transitoria, en consonancia con la mixtura de realismo e idealismo presente en la filosofía de Peirce. Si volvemos a la máxima pragmaticista [67] y a su expresión en la *figura 4*, el diagrama sitúa ante todo, a la izquierda, un signo dentro de una categoría abstracta, y, a la derecha, el mismo signo encarnado parcialmente en diversas categorías concretas. Las diversas "modulaciones" y los "diferenciales pragmáticos" permiten acotar el signo uno, abstracto y general, y convertirlo en múltiple, concreto y particular. Es una tarea que, en la teoría de categorías, se consigue mediante los diversos funtores en juego, quienes, dependiendo de la riqueza axiomática de cada uno de los entornos categóricos de la derecha, encarnan los conceptos generales en objetos matemáticos de mayor o menor riqueza.

Este primer proceso de especialización hacia lo particular, de concreción de lo general, de diferenciación de lo uno, puede entonces entenderse como un *cálculo diferencial* abstracto, en el sentido más natural posible: para estudiar un signo, se introducen primero sus *variaciones diferenciales* en adecuados contextos de interpretación. Pero, tanto desde el punto de vista de la máxima pragmaticista, como desde el punto de vista de la teoría de categorías, este no es sino el primer paso de un proceso dialéctico *pendular*. En efecto, una vez conocidas las variaciones del signo/concepto/objeto, la máxima pragmaticista nos insta luego a *reintegrar* esas diversas informaciones parciales en un todo que conforma el conocimiento del signo mismo. La teoría de categorías también propende a mostrar que, detrás del conocimiento concreto de ciertos objetos matemáticos, existen fuertes correlaciones funtoriales entre ellos (en particular, adjunciones), que son las que realmente nos informan profundamente acerca de los conceptos en juego. En cualquiera de estas dos aproximaciones, se nos insta a *completar* nuestras formas de conocer, siguiendo las líneas de un *cálculo integral* abstracto, contraparte pendular de la diferenciación, que permite detectar ciertas aproximaciones entre algunos particulares concretos que parecían alejados, pero que responden a cercanías naturales sobre un fondo *arqueal* no percibible en primera instancia.

El *ir y venir* diferencial/integral, presente tanto en la máxima pragmaticista como en la teoría de categorías, no solo se sitúa en un nivel epistemológico como el que acabamos de mencionar en el último párrafo, sino que se se *extiende continuamente* al "qué" y al "dónde" de los (cuasi-)objetos en juego. Los enlaces verticales a la derecha de la *figura 4* –denotados por "correlaciones, pegamientos, transferencias", y situados bajo el *signo general* de la "integral pragmática" ($\int$)– codifican algunos de los aportes más originales, tanto de un pragmaticismo modal amplio, como de la teoría de categorías, algo que ya hemos corroborado con la teoría de haces. Los (cuasi-)objetos (matemáticos) y los signos (peirceanos) viven como *redes vibrantes y evolutivas* en esos entornos de diferenciación e integración. Los haces, las categorías y el pragmaticismo parecen responder entonces a un complejo ordenamiento del prefijo *trans*, tanto en el nivel ontológico, como en el epistemológico. Nos adentraremos ahora en esa segunda dimensión.

Capítulo 9

Epistemología comparada y hacificación

Hemos descrito los (cuasi-)objetos de la matemática contemporánea como *redes* de información estructurada y como *deformaciones* "composibles" (Leibniz) dentro de esas redes, abiertas a una composición *relativa y asintótica* a lo largo de contextos variables. El dinamismo de esas redes y deformaciones las sitúa a caballo entre lo *eidal* y lo *quiddital*, en un vaivén iterado de aproximaciones conceptuales y materiales. Se trata de objetos *bimodales* en el sentido de Petitot, que se sitúan tanto en un espacio físico como morfológico-estructural, accionando y reaccionando dentro de espectros de correlaciones formales y estructurales con los múltiples entornos movibles donde parcialmente *transitan*. De esta manera, el "qué" y el "dónde" ontológicos se desdibujan, y sus fronteras resultan ser mucho más borrosas. Nos enfrentamos así a una *fluctuación ontológica* que puede llegar a producir un comprensible *horror vacui* en ciertas aproximaciones analíticas a la filosofía de la matemática, que buscan delimitar y acotar sus perspectivas de la manera más clara posible, huir de borrones y vaguedades, y situar esas nítidas delimitaciones sobre fragmentos de *absoluto*. No obstante, desde una aproximación sintética contrapuntística, abierta al tránsito *relativo*, como la matemática contemporánea indica, la incorporación de consideraciones sobre *fronteras movibles* entre lo conceptual y lo material[314] se convierte en un imperativo. Una ontología transitoria, como la que hemos descrito en el capítulo anterior, da lugar entonces también a una epistemología fluctuante, no fácilmente encasillable en los compartimientos estancos del cuadrado de Shapiro [14]: una *variación* natural del "qué" y el "dónde" da lugar a una variación asociada del "cómo". Una vez abierto el espectro correlativo de perspectivas

314 Para Petitot, "hay una solidaridad racional entre concepto, matemática y experiencia, que vuelve a poner en causa la concepción positivista de las ciencias y conduce a una rehabilitación del criticismo sobre nuevas bases" [proto-geometrías, orden morfológico-estructural, dialéctica local/global, invariantes fenomenológicos del mundo y no sólo del lenguaje, etc.]. Véanse las contribuciones de Petitot a la *Enciclopedia Einaudi*, en particular, "Locale/globale", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1979, vol. 8, pp. 429-490, y "Unità delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1982, vol. 15, pp. 1034-1085 (cita p. 1084). En este último artículo, Petitot sitúa a Lautman en el centro de su argumento ("La filosofia matematica di Albert Lautman", ibíd., pp. 1034-1041): se trata de la primera presentación profunda de la obra de Lautman allende el hexágono.

epistemológicas dispares –dentro de lo que podríamos llamar una *epistemología comparada*–, en este capítulo pretenderemos reintegrar sin embargo varias de esas perspectivas bajo una suerte de *haz epistemológico*, sensible a la ineludible dialéctica complementaria de variedad y unidad que requieren las matemáticas contemporáneas.

Más allá de lo diferenciado, hemos visto repetidamente en la segunda parte de este trabajo cómo muchas construcciones centrales de la matemática ponen en juego procesos *pendulares* de diferenciación y reintegración, detrás de los cuales emergen estructuras invariantes *arqueales*. Recuérdense, por ejemplo, los motivos de Grothendieck detrás de las variaciones de las cohomologías [83-84], los topos clasificadores de Freyd detrás de las variaciones de las categorías relativas [138], los núcleos aritméticos de Simpson detrás de las variaciones teoremáticas de la matemática "ordinaria" [140-141], los núcleos proto-geométricos de Zilber detrás de las variaciones de las teorías fuertemente minimales [144-145], el semigrupo de Lax-Phillips detrás de las variaciones no euclidianas de las ecuaciones de onda [124-125], el grupo de Langlands detrás de las variaciones de la teoría de representaciones [105], el grupo de Grothendieck-Teichmüller detrás de variaciones aritméticas, combinatorias y cosmológicas [128, 132], el *h*-principio de Gromov detrás de las variaciones de las relaciones diferenciales parciales [149], etc. Son todos ejemplos en los cuales, a lo largo de redes y deformaciones, *el conocimiento de los procesos matemáticos se adelanta mediante series de iteraciones en ámbitos correlativos triádicos: diferenciación-integración-invarianza, eidos-quidditas-arkhê, abducción-inducción-deducción, posibilidad-actualidad-necesidad, localidad-globalidad-mediación.*

La matemática avanzada invoca esa incesante "triangulación", cuyo reflejo más impactante (tanto técnico como conceptual) aparece tal vez en la noción de haz [161-162]. Un hecho de tremenda importancia dentro de la matemática contemporánea es *la necesidad de situarse en una triadicidad plena y no reducirla* (no "degenerarla" diría Peirce) a segundidades o primeridades. Ahora bien, dentro de los modos analíticos del entendimiento, la triadicidad desaparece ya que el análisis realizado (clásico) es básicamente dual, al estilo de las exclusiones *o...o...* tipo Benacerraf [15]. Esto significa que el aparato de visión analítica se encuentra *intrínsecamente limitado* para observar el funcionamiento de las matemáticas avanzadas, *si se lo considera en sí mismo, independientemente de una contrastación sintética.* Una combinación pendular de lo analítico y lo sintético, lo diferencial y lo integral, lo ideal y lo real, parece ser el camino epistemológico a seguir. Observe en cambio que, a un nivel "meta-epistemológico", se requiere una *precedencia sintética*, no analítica, para permitir flujos, oscilaciones y pegamientos entre los subfragmentos analíticos y sintéticos en niveles inferiores.

Las usuales epistemologías "idealista" o "realista", como se han presentado *por separado* en la primera parte [13-14, 71], llevan a exclusiones que no convienen al trasegar ideal-real de las matemáticas contemporáneas. *Ni* una diferenciación analítico-ideal (que impediría, por ejemplo, la emergencia de los esquemas en Grothendieck [95]), *ni* una integración sintético-real (que impediría, por ejemplo, la emergencia de las redes de desigualdades en Gromov [147]) sirven, por separado, para cubrir el mundo. Cuestión de acercarse a una colección de *recubrimientos* cada vez más finos[315] del entronque ideal/real, una "epistemología comparada" se encuentra entonces a la orden del día. La articulación, el balance dialéctico, la correlatividad, la pragmática resultan aquí imprescindibles. Si cada perspectiva epistemológica da lugar a un *corte* interpretativo, a un peculiar *entorno de proyectividad*, a una modulación diferencial del conocer, el siguiente paso consiste en articular las proyectividades coherentes, equilibrar las polaridades y pegar las modulaciones, *exactamente como lo postula la máxima pragmaticista de Peirce* [64-68]. Al adentrarnos en este proceso, nos sumergimos entonces en una suerte de "hacificación" epistemológica, donde la multiplicidad diferencial local se recompone en una unidad integral global.

Antes de considerar las obstrucciones teóricas y los adelantos que surgen en esa empresa de *hacificación de una epistemología comparada*, un ejemplo detallado puede ser de utilidad. Consideremos los procesos de "suavización" y "globalización" introducidos por Gromov en la geometría riemanniana [146]. Por un lado, Gromov estudia las deformaciones infinitesimales de desigualdades, en contextos *locales* bien definidos; por otro lado, estudia el conjunto de esas deformaciones de acuerdo con múltiples métricas posibles sobre la variedad, y calcula invariantes *globales* ligados a la consideración de todas las métricas en conjunto. En ese ir y venir, el conocimiento de los objetos no se sitúa *ni* en el proceso de deformar y acotar localmente desigualdades *ni* en el proceso de construir invariantes globales, *sino* en una indispensable *dialéctica* entre las dos aproximaciones: sin la red de desigualdades analíticas no emergen los invariantes sintéticos [147], sin los invariantes la red de desigualdades flota sin razón de ser (ya sea desde un punto de vista técnico o conceptual). El conocimiento de la geometría riemanniana incorpora entonces elementos analíticos y configuraciones sintéticas, y se sitúa *a la vez* sobre perspectivas "idealistas" (conjunto de todas las métricas) y "realistas" (deformaciones físicas locales). En el caso en cuestión, el *haz* de las diferentes métricas locales da lugar a secciones continuas ligadas a los invariantes en juego. Pero, más allá del caso, el mismo Gromov señala cómo, en el "árbol de Hilbert" [148], el contraste entre "exponenciales", "nubes" y "pozos"

315 Esos recubrimientos pueden verse como dignos análogos *metafóricos* de las topologías de Grothendieck [81] y de la cirugía algebraica de Voevodsky [84, 146]. Sobre el papel de la metáfora, *tanto* en la inventividad matemática ("qué"), *como* en el conocimiento posterior de esa inventividad ("cómo"), véase el próximo capítulo. En cierto sentido, *solo* se puede cubrir lo real al introducir imágenes metafóricas, de la misma manera que, en el lema de Yoneda [139-140], solo se puede cubrir "realmente" una categoría (mediante su categoría asociada de prehaces) al introducir objetos "ideales" o "imaginarios", no representables.

gobierna la *multidimensionalidad* del conocimiento matemático, *nunca reducible* a una sola de sus dimensiones.

Una "hacificación" en epistemología comparada requiere –como hemos visto en el análisis genérico de la noción de haz [161-162]– *prescisar* primero nociones de vecindad, cubrimiento y coherencia, antes de pasar a eventuales pegamientos. Una *vecindad entre perspectivas epistemológicas* requiere postular ante todo una cierta *conmensurabilidad* entre las mismas; nos situamos aquí explícitamente en contra de supuestas inconmensurabilidades entre "paradigmas" (Kuhn), que, al menos en matemáticas, *rara vez se dan*[316]. En este contexto, una "vecindad epistemológica" debe acercar las diferentes perspectivas *ya sea en sus métodos* (por ejemplo, el método "sintético" aplicado a una postura realista o idealista: casillas 2_3, 2_4 en la *figura 5* sobre el planteamiento "puro" de problemáticas en filosofía de la matemática [71], donde denominamos i_j la casilla *j* en la columna *i*), *ya sea en sus objetivos* (por ejemplo, el acercamiento a lo real: casillas 1_3, 2_3 en la *figura 5*), *ya sea en sus mediaciones* dentro de las urdimbres en juego (por ejemplo, la mediación asintótica: casillas 1_6, 2_5 en la *figura 5*). Esta *tercera opción* es la posibilidad más rica y renovadora desde un punto de vista conceptual, ya que puede ayudar a eliminar exclusiones dualistas gracias al trabajo con *redes de aproximación* epistémica.

Una vez establecida una cierta vecindad (por ejemplo, siguiendo con los casos anteriores, una vecindad de "metodología sintética", de "finalidad realista", o de "mediación asintótica"), se plantea la pregunta de cómo *cubrir* la vecindad. Aquí, las vecindades podrían a veces recubrirse binariamente (en los casos anteriores, por ejemplo, mediante las casillas dos a dos indicadas), pero los casos más interesantes podrían corresponder a cubrimientos *no* binarios, como sucede, por ejemplo, en la tercera situación: la "mediación asintótica" puede ser recubierta no sólo con una "diagonal" binaria (casillas 1_6, 2_5 de la *figura 5*), sino con una "esquina" ternaria (casillas 1_6, 2_5, 2_6 de la *figura 5*). La emergencia de esta "esquina" por encima de un contrapunto meramente dual lleva a observar la *importancia de lo limítrofe y lo asintótico*, una condición crucial no solo en el conocimiento extrínseco de los objetos, sino en las características intrínsecas mismas de los objetos en estudio (condición *(ix)* acerca de ciertas especificidades de la matemática contemporánea [31]).

En algunos casos, los cubrimientos podrían ser *coherentes* (es decir, no contradictorios localmente) y podrían dar lugar entonces a *pegamientos* adecuados ("secciones epistemológicas" en el haz). Estos pegamientos abrirían novedosas perspectivas epistemológicas, capaces de responder a ciertas problemáticas localmente, de cierta manera, y a otras

316 Desde un punto de vista *epistemológico*, los diversos paradigmas ("ismos") en matemáticas (logicismo, intuicionismo, formalismo, estructuralismo, etc.) no solo no se anulan entre sí, sino que ganan con las *fusiones mixtas* (por ejemplo, mediante sus reinterpretaciones en teoría de categorías). Desde un punto de vista *lógico*, las *amalgamas* en teoría de modelos son legión, y muchos trabajos interesantes en el área corresponden a sofisticados cruces de entes *aparentemente* no conmensurables.

problemáticas, de *otra* manera, con tal de preservar coherencias entre las respuestas. Todo esto impulsaría entonces un *uso, parcial y asintótico, de estrategias epistemológicas relativas* (que cambian de acuerdo a un cambio de vecindad), *allende epistemologías taxativas o absolutas*, al estilo de las propuestas en el cuadrado de Shapiro [14]. Consideremos un caso concreto de esta situación, al enfrentar el problema de *cómo* conocer la estructura de grupo. Su raigambre *arqueal*, como invariante fenomenológico en el *mundo* (y no sólo como descriptor en un *lenguaje*), emerge gracias a los trabajos de Grothendieck [83], Connes [128], Kontsevich [132], Gromov [149], Zilber [144], etc. Sin embargo, genéticamente, la noción de grupo aparece como sistema de ordenamiento *eidal* de ciertas simetrías (Galois), que luego da lugar (Jordan) a enormes facilitaciones *quidditales* en el cálculo. Un grupo es entonces, *a la vez*, un (cuasi-) objeto arquetípico, ideal y real. La *aparente* confusión de estas tres perspectivas se elimina, no obstante, al leerlas como fragmentos de una sección en un haz. Por un lado, si identificamos la base topológica del haz con una colección de *vecindades en un árbol temporal* ("historia"), vemos cómo un grupo –localmente simétrico en una vecindad (Galois: 1830), localmente combinatorio en otra (Jordan: 1870), localmente estructural en otra (Noether: 1930), localmente cohomológico en otra (Grothendieck: 1960), o localmente cosmológico en otra más (Connes, Kontsevich: 2000)– puede perfectamente vivir en múltiples registros de conocimiento, *coherentes los unos con los otros*. Por otro lado, si tomamos la base del haz como una colección de *vecindades en un mapa conceptual* ("geografía"), vemos cómo un grupo –localmente lineal en una vecindad (Galois, Jordan, Noether), localmente diferencial en otra (Lie, Borel, Connes), localmente aritmético en otra (Dedekind, Artin, Langlands) o localmente categórico en otra más (Grothendieck, Serre, Freyd)– puede *proyectarse* sobre todas estas manifestaciones aparentemente divergentes. A su vez, la "historia" y la "geografía" pueden fundirse en una suerte de *haz al cuadrado* que vuelve a trazar toda la riqueza –extrínseca e intrínseca– del concepto.

De acuerdo con la multidimensionalidad de la visión matemática, con la profundidad del "árbol de Hilbert", con la relatividad de las redes de perspectivas categóricas y con la "hacificación" de esas redes, podemos intuir la existencia de una *compleja protogeometría* subyacente a una epistemología matemática comparada. Explicitamos aquí, detrás de nuestras consideraciones, una hipótesis de continuidad[317] entre el

---

317 Esta continuidad es *una* expresión del *sinequismo* peirceano, donde se postula una hipótesis de continuidad aún más fuerte, al suponer la existencia de un continuo *completamente operativo* en la naturaleza (dentro de la cual el género humano aparecería, según Peirce, tanto material *como* semióticamente). Otra expresión de ese sinequismo está constituida por las tres categorías cenopitagóricas universales, que, en la hipótesis peirceana, recorren continuamente tanto el mundo de los fenómenos *como* las formas de conocimiento de esos fenómenos. Para una descripción del sinequismo, del concepto genérico (no clásico, no cantoriano, no extensional) del continuo según Peirce, y de algunos modelos matemáticos parciales para ese continuo no estándar, véase Fernando Zalamea, *El continuo peirceano*, Bogotá: Universidad Nacional, 2001.

mundo de los fenómenos, el mundo de los (cuasi-)objetos matemáticos asociados a esos fenómenos y el mundo del conocimiento de esos objetos, es decir, una *hipótesis de continuidad entre lo fenoménico, lo óntico y lo epistémico*. Las construcciones (y los descubrimientos) matemáticos que hemos recorrido extensamente en la segunda parte de este trabajo muestran que las matemáticas contemporáneas proveen *nuevos soportes* para la eventual corrección de esa hipótesis de continuidad. Aquí, las matemáticas avanzadas nos ilustran con mayor fineza que las matemáticas elementales, puesto que los bajos umbrales de complejidad de estas últimas *impiden* la emergencia de la dialéctica continuo/discreto, que recorre sin cesar el espacio contemporáneo de la matemática. Desde un punto de vista epistemológico, las distintas perspectivas no son entonces más que *quiebres de continuidad*. En esos quiebres (al igual que en la abducción peirceana) se generan *nuevos* conocimientos[318], y –dentro de una epistemología abierta al tránsito– esos conocimientos, cuando son coherentes, pueden luego reintegrarse adecuadamente.

La *protogeometría* subyacente en una epistemología comparada de las matemáticas posee diversas características peculiares, ligadas a una *combinatoria de acoples coherentes* entre las redes en juego (redes multidimensionales, profundas, iterativas). En efecto, por un lado, las *tensiones bipolares inversas* entre "prescisión" y "deducción" [162] muestran que, en muchos casos matemáticos cuyo umbral de complejidad es alto (entre los cuales se sitúa el caso de los haces, en cualquiera de sus expresiones geométrica, algebraica o lógica), emerge una *jerarquía* ("horizontal") de acoples parciales, cuyas resoluciones *franja por franja* dan lugar a importantes formas de conocimiento matemático. Este es el caso, por ejemplo, del *h*-principio de Gromov [149], donde una "tensión bipolar inversa" entre secciones locales y holonómicas da lugar a toda una serie de mediaciones homotópicas, con fragmentos calculatorios de enorme interés práctico en la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales parciales. Por otro lado, los *nodos exponenciales autorreferentes* en el "árbol de Hilbert" [148] dan lugar a *otra jerarquía* ("vertical") de acoples parciales, cuyas resoluciones *nivel por nivel* producen también notables avances. Es el caso, por ejemplo, de la noción fundamental de espacio, cuya amplitud se extiende al ir transitando entre conjuntos, espacios topológicos, topos de Grothendieck [81] y topos elementales [111], generando en cada nivel conglomerados *distintos* (aunque *coherentes entre sí*) de nuevos resultados matemáticos. Pero existe también, al menos, una *tercera jerarquía* ("diagonal") de acoples parciales entre las redes matemáticas, directamente influenciada por el espíritu *transgresor* de Grothendieck. En efecto, más allá de un desplazamiento horizontal o vertical, y *más allá de su simple combinación*, existen mediaciones diagonales con rasgos arqueales

318 Puede existir aquí una analogía profunda entre los procesos de *ruptura de simetría* en la física de los primeros instantes del universo, y los procesos de ruptura de continuidad en los grupos *arqueales* continuos que permiten representar esas formas de simetría.

(terceridades peirceanas no "degeneradas") entre ámbitos decididamente alejados del conocimiento matemático (dibujos de niños entre combinatoria y variable compleja [128], grupo de Grothendieck-Teichmüller entre aritmética y cosmología [128], grupos no conmutativos entre lógica y física [145], etc.).

La protogeometría de esos acoples incorpora, por tanto, toda una compleja trabazón de elementos multidimensionales, en concordancia con la multidimensionalidad "intuitiva" del saber matemático. La *imagen* de ese saber matemático se aleja de su fundamentación lógica[319], y una nueva preeminencia de la geometría entra en el mapa (ítem *(vii)* dentro de las tendencias distintivas en las matemáticas contemporáneas [31]). De hecho, el comienzo del siglo XXI puede ser tal vez la época apropiada para empezar a considerar seriamente una *geometrización de la epistemología* –como la que estamos proponiendo[320]–, que ayude a superar (o, al menos, complementar) la "logicización de la epistemología" realizada a lo largo del siglo XX. La influencia de la *filosofía analítica*, cuyo sostén lógico se reducía a la *lógica clásica* de primer orden, merece empezar a ser contrarrestada por una *filosofía sintética*, mucho más cercana a la emergente *lógica de los haces*. Se trata de un importante cambio de paradigma en la matemática *y* en la lógica (resultados fundamentales de Caicedo [160]), que debe empezar a reflejarse *también* en la filosofía (ontología, epistemología, fenomenología) de la matemática. De hecho, los cambios en la base lógica codifican la deformabilidad de los (cuasi-)objetos matemáticos, a lo largo de tránsitos relativos, y permiten superar la "rigidez" clásica de los objetos, dentro de un supuesto universo absoluto.

Al acercarse en detalle a la obra de Grassmann, Châtelet describe con lucidez una de las problemáticas fundamentales del conocimiento matemático:

> Como en el contraste continuo/discreto, lo igual y lo diverso emergen de una polarización; es así como pueden discernirse las formas algebraicas «resultantes por lo igual» y las formas combinatorias

---

319 Es algo que señala aun un convencido estudioso de los fundamentos como Feferman: "La imagen lógica de las matemáticas tiene poca relación con la estructura lógica de las matemáticas, como funciona en la práctica", Solomon Feferman, "For Philosophy of Mathematics: 5 Questions", p. 13, material de clase, http://math.stanford.edu/~feferman/papers/philmathfive.pdf. Feferman repite sin embargo los usuales prejuicios contra un platonismo "ingenuo" o "trivial": "De acuerdo con la filosofía platónica, se supone que los objetos de las matemáticas, como números, conjuntos, funciones y espacios, existen independientemente de los pensamientos y las construcciones humanas, y se supone que los enunciados acerca de esas entidades abstractas tienen valores de verdad independientes de nuestra habilidad para determinarlos" (ibíd., p. 11). Compárese esta descripción (caricatura) con un platonismo más complejo a la Lautman [37-40] o a la Badiou [157-158].

320 El programa de *naturalización de la fenomenología* de Petitot corre sobre bases similares, y abre un gran lugar a la geometría; véase Jean Petitot et al., *Naturaliser la phénoménologie*, París: Éditions CNRS, 2002. Aunque Petitot utiliza técnicas de la neurociencia, que aquí no mencionamos, su invocación de la geometría riemanniana y de la lógica de los haces antecede nuestras perspectivas.

> «resultantes por lo diverso». *Hay que encontrar la articulación que permite pasar continuamente de lo igual a lo diverso*[321].

En esa búsqueda de una articulación *continua*, las herramientas matemático-filosófico-metafóricas de Châtelet incluyen "balances dialécticos", "cortes diagramáticos", "destornilladores", "torsiones", "incisos articuladores de lo sucesivo y lo lateral", es decir, toda una serie de *gestos* atentos al movimiento, que "*inauguran* dinastías de problemas"[322] y corresponden a cierta *fluidez electrodinámica*[323] del saber. Aquí nos encontramos de nuevo con la multidimensionalidad de los (cuasi-) objetos matemáticos, una multiplicidad que solo puede ser aprehendida mediante "gestos", esto es, mediante *articulaciones en movimiento* que permiten traslapes parciales entre el "qué" y el "cómo". La epistemología matemática –al menos si desea poder incorporar en su espectro los objetos de la matemática contemporánea (y moderna, en muchos casos)– debe ser entonces esencialmente movible, presta a la torsión, capaz de reintegrar cortes y discontinuidades, sensible a articulaciones pasajeras, en suma, *realmente afín* a los objetos que pretende vislumbrar. Ninguna posición fija, determinada *a priori*, será por tanto suficiente para entender la TRANS-*forma*-bilidad del mundo matemático, con sus elásticos tránsitos, sus inatajables vaivenes entre formas diversas, sus zigzagueantes senderos entre los ámbitos modales.

En los estudios de caso de la segunda parte de este trabajo, podemos detectar concretamente diversas propiedades de la "protogeometría epistémica" que hemos venido discutiendo. *Tanto* en los (cuasi-)objetos en juego, *como* en las formas de conocerlos, observamos rasgos protogeométricos comunes, entre los cuales hemos de resaltar: *(a)* cortes y reintegraciones multidimensionales, *(b)* iteraciones triádicas, *(c)* deformaciones de objetos y perspectivas, *(d)* procesos de paso al límite mediante aproximaciones no clásicas, *(e)* enlaces y acoples asintóticos, *(f)* fragmentos de hacificación. *Continuamente* se traslapan el "qué" y el "cómo" en las matemáticas contemporáneas, y la protogeometría misma de esos traslapes tiende a elevarse sobre una base *unitaria* común. Los esquemas de Grothendieck [80] combinan muchas de las propiedades anteriores: "ónticamente" los esquemas se construyen *(a)* introduciendo representaciones estructurales de anillos, *(c)* mirando los puntos como ideales primos y topologizando el espectro, *(f)* definiendo las fibras localmente como espacios estructurales de anillos y pegándolas adecuadamente; "epistémicamente", los esquemas involucran *(a)* un proceso de generalización y especificación entre objetos

---

321 Gilles Châtelet, *Les enjeux du mobile*, op. cit., p. 167 (nuestras cursivas).

322 Ibíd., pp. 37, 33, 38, 218, 32.

323 Châtelet enlaza la "fluidez" de Grassmann (ibíd., p. 166) con el electromagnetismo de Maxwell para estudiar una "electrofilosofía" cercana al espacio electrogeométrico de Faraday (ibíd., cap.5). Una mirada geométrica a los "operadores *alusivos*" (ibíd., p. 219, nuestras cursivas) de Maxwell y Faraday rompe las lecturas puntuales o instantáneas, y explora las deformaciones asintóticas de los entes dentro de vecindades dadas ("pedagogía de las líneas de fuerza", ibíd., pp. 238-248).

multidimensionales, *(b)* una triadicidad iterada[324] entre una base, una ampliación y una mediación (proyección) entre ellas, *(c)* una comprensión de los objetos mediante sus posiciones relativas, etc. Otros registros similares pueden también especificarse en las otras grandes construcciones de Grothendieck: topos [81-82] o motivos [83-84]. De igual modo, la correspondencia de Langlands [103-106] incluye, "ónticamente", *(a)* representaciones de grupos, *(b)* tránsitos iterados entre lo modular, lo automorfo y lo *L*-representable, *(c)* estructuras mixtas diferenciables y aritméticas, *(d)* manejos de grupos no conmutativos, mientras que, "epistémicamente", la estrategia del programa se asienta en *(a)* entender los objetos aritméticos como "cortes" (proyecciones) de objetos geométricos más complejos, *(b)* buscar sistemáticamente mediaciones geométricas entre la aritmética –discreta– y la variable compleja –continua–, *(c)-(d)* observar las deformaciones analíticas de los objetos, etc. Otra situación similar ocurre con la teoría general de la dialéctica estructura / no estructura según Shelah [111-113]: "ónticamente" emergen *(a)* amalgamas en dimensiones finitas altas, *(d)* acumulaciones cardinales mediante objetos no exponenciales (teoría *pcf*), *(e)* modelos monstruo y urdimbres asintóticas de submodelos, a la vez que, "epistémicamente", la visión de Shelah integra *(a)* una celebración de la multidimensionalidad matemática, *(b)* una incesante *moderación* entre lo estructurado y lo no estructurado, *(d)-(e)* una comprensión profunda de los objetos en altos niveles de la jerarquía conjuntista como límites de fragmentos "moderados" y fragmentos descontrolados ("wild"), etc. De esta manera, se enlazan *naturalmente* ciertas características protogeométricas comunes entre las redes ónticas y los procesos epistémicos en juego[325]. A lo largo de la segunda parte de este trabajo hemos realizado *implícitamente* otros análisis, y podríamos explicitar aquí otros ejemplos (las obras de Connes, Kontsevich, Zilber, Gromov se prestan especialmente a ello), pero tal vez los casos anteriores sean suficientemente ilustrativos.

---

324 El *primer nivel* de la iteración corresponde al paso (algebraico) del anillo conmutativo unitario inicial al conjunto de sus ideales primos; el *segundo nivel* al paso (topológico) del espectro combinatorio al espectro con la topología de Zariski; el *tercer nivel* al paso (categórico) de las vecindades a las fibras; el *cuarto nivel* a la hacificación final del todo. Es interesante observar cómo esas iteraciones *no son absolutas* y pueden realizarse en un orden distinto o, mejor aún, *mixto*.

325 En última instancia, las transformaciones de una ontología fija hacia una *ontología transitoria* y de una epistemología fija hacia una *epistemología comparada hacificada* hacen que los "entes" bajo estudio en cada una de esas aproximaciones ("qué", "dónde", "cómo") se acerquen entre ellos, y que sus fronteras movibles sean mucho menos excluyentes. Las "redes" ónticas y los "procesos" epistémicos no serían entonces sino especificaciones relativas (al contexto ontológico y al contexto epistemológico) de una misma suerte de "*proto-acciones*" comunes (algo que coincidiría con tendencias de la semiótica universal peirceana). Dentro de ese "borramiento" de las fronteras entre lo óntico y lo epistémico, vale la pena señalar cómo Badiou, por un lado, mira la matemática básicamente como una "ontología", mientras que Petitot, por otro lado, la contempla básicamente como una "epistemología". Desde una lectura analítica, tales borramientos resultan ser impropios, pero, como hemos venido observando, desde una lectura sintética –*una vez aceptados los tránsitos, ósmosis y contaminaciones*– pueden realizarse nuevos *análisis* de los procesos de transferencia, sin tener que abocarse a un relativismo extremo o a formas ingenuas de escepticismo. Las formas de descomposición (análisis) del tránsito (síntesis) no pueden obviarse más en la filosofía matemática.

La limitante principal que parecería tener una epistemología "analítica" de las matemáticas –en contraposición con la epistemología comparada "sintética" que aquí insinuamos– se centra en la dificultad analítica de enfrentar ciertos entornos inherentemente vagos, ciertas *zonas de penumbra*, o, en los términos de Châtelet[326], ciertos "puestos avanzados de lo obscuro", ciertos lugares elásticos de "negatividad espacial", ciertas "bisagras-horizontes" donde emergen mixturas complejas que *resisten* todo tipo de descomposiciones taxativas. Estudiaremos con mayor detenimiento en el próximo capítulo la problemática de la penumbra, al abordar las dinámicas (sinuosas, no lineales) de la *creatividad* matemática, pero, en lo que nos resta de este capítulo, nos acercaremos a la dialéctica de lo obscuro y lo luminoso en conjunción con las tres polaridades ubicuas *análisis/síntesis*, *idealismo/realismo* e *intensionalidad/extensionalidad* que aparecen dentro de cualquier aproximación epistemológica. Nuestro objetivo consiste en *mediar* ("moderar": Grothendieck, Shelah) entre ellas, y proponer acoples razonables desde los "puestos avanzados" de la matemática contemporánea.

La polaridad análisis/síntesis ha sido siempre fuente de equívocos y avances, tanto en filosofía[327] como en matemáticas[328]. Forma dialéctica (del tipo tema-antitema, $\theta\ \overline{\theta}$), la polaridad contrapone el conocimiento por descomposición o por composición, en *forma relativa*, pues "no existen criterios absolutos ni para procesos de análisis, ni para procesos de síntesis"[329]. De hecho, la naturaleza se presenta siempre a través de *mixturas* que el entendimiento descompone y recompone en oscilaciones iteradas. La diferenciación analítica (típica en la teoría matemática de conjuntos: objetos conocidos mediante sus "elementos") puede llevar a una mejor resolución de ciertas problemáticas, aunque la subdivisión en sí (Descartes) no asegura ningún resultado (Leibniz)[330]. La integración sintética (típica en la teoría matemática de categorías: objetos conocidos mediante sus relaciones con el entorno) ayuda por su lado a recomponer una unidad más cercana a las mixturas de la naturaleza, pero –al igual que con su contraparte– surgen obstrucciones inevitables en su uso. Debe intentar producirse así un "*esfuerzo*

---

326 Châtelet, *Les enjeux du mobile*, op. cit., pp. 22, 37.

327 Véase Gerald Holton, "Analisi/sintesi", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1977, vol. 1, pp. 491-522. Hemos muchas veces intentado *usar* (técnica, conceptual y analógicamente) la Enciclopedia Einaudi, cuyo proyecto eminentemente *transductor* se acerca naturalmente a la matemática moderna y contemporánea. Son de gran utilidad los dos volúmenes finales (*15 (Sistematica), 16 (Indici)*), y, en particular, los fascinantes *mapas*, tablas y diagramas de lectura, elaborados por Renato Betti y sus colaboradores, donde se ponen de manifiesto las múltiples ósmosis y deslices del pensamiento contemporáneo (recuérdese la filosofía del "desliz" de Merleau-Ponty [157]). Las contribuciones notables de Petitot en la *Enciclopedia* nos introducen a las problemáticas local/global, centrado/descentrado, uno/múltiple, que, como hemos visto, resurgen en la matemática contemporánea.

328 Véase la compilación Michael Otte, Marco Panza, *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Dordrecht: Kluwer, 1997.

329 Holton, "Analisi/sintesi", op. cit., p. 502.

330 Ibíd., p. 503.

continuo de equilibrar análisis y síntesis" (Bohr)[331], algo que se consigue con particular éxito en el pragmaticismo peirceano, y, en particular, en su máxima pragmaticista [64-68]. Una *orientación epistemológica* puede surgir entonces gracias a un abstracto "cálculo" diferencial/integral (analítico/sintético), situado sobre un *tejido relativo de contrastaciones, obstrucciones, residuos y pegamientos* [67]. Los estudios de caso que hemos realizado dentro de la matemática contemporánea muestran que esa orientación nunca es absoluta sino *asintótica*, que depende de múltiples relativizaciones –ascensos *eidales* y descensos *quidditales*, "la razón sube primero con el análisis y luego desciende con la síntesis"[332]–, pero cuenta con suficientes puntos de referencia (invariantes *arqueales*) para calibrar los movimientos relativos.

Yendo aún más allá del equilibrio pendular análisis/síntesis *invocado* por Bohr, la matemática contemporánea nos sugiere pistas para *efectuar* ese equilibrio. Hemos visto cómo la noción de *haz* combina de manera muy fina lo analítico y lo sintético, lo local y lo global, lo discreto y lo continuo, lo diferencial y lo integral [161-162]. Una *"hacificación" de la polaridad análisis/síntesis* da lugar entonces a una nueva *red* de perspectivas epistemológicas, en forma acorde con los direccionamientos de la matemática contemporánea. En efecto, si observamos la *diagramación* del concepto general de haz que aparece en la *figura 13*, podemos ver cómo, detrás de la doble contraposición análisis/síntesis (disposición vertical en el diagrama) y local/global (disposición horizontal), subyace una muy interesante *mediación diagonal* que rara vez se pone de manifiesto. Tomando el concepto analítico *pivote* de "cubrimiento" y modulándolo a través de la jerarquía sintética "sección-preservación-proyección-restricción" (*figura 13*), emerge una noción natural de *transformada transversal de lo cubriente*, donde se superponen, iteran y operan parcialmente los *estratos* abiertos y cerrados[333] de las diversas representaciones (o "cubiertas") involucradas. La transformada –ligada a una suerte de protogeometría de la posición ("pre-topos")– *combina* la capacidad analítica de cubrir por descomposiciones (ya sea mediante elementos, vecindades o aproximaciones asintóticas), y la capacidad sintética de recomponer lo fragmentado a lo largo de contextos variables (ya sea mediante acoples parciales o pegamientos estructurales más estables). Llamaremos *transformada de Grothendieck*[334] a este tipo

---

331 Ibíd., p. 505.

332 Ibíd. Las oscilaciones del pensamiento se estudian con herramientas *geométricas* al menos desde Ramon Llull, *Libro del ascenso y descenso del entendimiento* (1304), Madrid: Orbis, 1985.

333 La noción de "cubrimiento" viene del latín *cooperire* (*operire*, "cerrar"; *cooperire*, "cerrar o cubrir por completo", siglo XI). En contrapunto con *aperire* ("abrir"), la noción de cubrimiento incluye por tanto, desde sus raíces etimológicas, una concepción del *tránsito* entre entornos abiertos y cerrados (tránsito reflejado en otros derivados fronterizos: *operculum*, "cubierta"; *aperitivus*, "lo que abre").

334 Revisando el capítulo 4, resulta claro que ese proceso transformacional de los conceptos matemáticos está siempre presente en la inventividad conceptual global de Grothendieck. Pero aún más, desde un punto de vista técnico local, las topologías de Grothendieck [81] ayudan a encarnar de manera acotada lo que denominamos aquí "transformada

de barrido mediador entre lo analítico y lo sintético; un barrido reticular particularmente atento a los *mixtos relativos* entre los conceptos en juego.

Desde su misma definición, la transformada de Grothendieck incorpora dos modos peculiares de conocimiento. Mediante lo *transverso*, introduce una urdimbre reticular sobre la que se establecen contrastaciones, acoples y asintotías. Mediante lo *cubriente*, introduce una fluidez dinámica (el "desliz" de Merleau-Ponty [157]) encarnada en el gerundio mismo: el "estar cubriendo" a lo largo de una situación ("geografía") y de una duración ("historia"). La transformada de Grothendieck cambia entonces nuestras perspectivas epistemológicas por el simple hecho de *suavizarlas* en su conjunto (Gromov [146, 148]): al integrarlas dentro de un *tejido evolutivo*, las perspectivas puntuales se desingularizan, a favor de una comparabilidad que resalta las regularidades, mediaciones y mixturas entre ellas. Esto se pone de manifiesto en la *práctica matemática* que hemos revisado en la segunda parte de este ensayo. La transversalidad y la "maravillosa mixtura" en los modos de trabajar de Serre [101], la contaminación transversal en el programa de Langlands [105], la dialéctica de adjunciones por doquier y la evolución de los objetos en Lawvere [109], la moderación cubriente en la teoría *pcf* de Shelah [114], el teorema del índice en Atiyah con su mezcla de transversalidad *eidal* (equilibrio entre tránsitos y obstrucciones) y de cobertura *quiddital* (desde la geometría algebraica hasta la física) [121], el análisis armónico (precisa forma técnica de transversalidad cubriente) aplicado a la ecuación de onda no euclídea en Lax [124], la no conmutatividad que recorre transversalmente la mecánica cuántica en Connes [126], las cuantizaciones cuyos recubrimientos transversales permiten reconstruir las estructuras clásicas en Kontsevich [132], las categorías intermedias entre categorías regulares y topos producidas como cortes transversales (*Map*, *Split*, *Cor*) sobre alegorías libres en Freyd [138], los núcleos lógicos cubrientes de la aritmética de segundo orden en Simpson [141], los núcleos proto-geométricos cubrientes de las teorías fuertemente minimales en Zilber [144], la transversalidad del *h*-principio en Gromov [149], son todos ejemplos muy finos y concretos donde las mediaciones y las suavizaciones de la "transformada transversal cubriente" de Grothendieck están al acecho. En todas estas construcciones, la mirada epistemológica del matemático es lo suficientemente flexible para *cubrir una jerarquía de estratos de idealidad y realidad*, en forma dinámica, *intercambiando*, cuando el entorno técnico o el impulso creativo así lo requieren, los contextos de interpretación o adecuación de los (cuasi-)objetos.

Estas consideraciones ayudan a comprender mejor cómo –dentro de la matemática contemporánea y, más ampliamente, dentro de la matemática avanzada [23]– las polaridades del idealismo y del realismo no deben

de Grothendieck". En efecto, para *cualquier* sitio arbitrario (categoría con topología de Grothendieck), la categoría de prehaces sobre ese sitio da lugar a una categoría de haces, mediante un proceso general de *hacificación* que corresponde precisamente a efectuar las mediaciones contempladas en la "transformada de Grothendieck".

considerarse por separado (exclusión discreta, vía una aproximación analítica), sino en *plena* interrelación (conjunción continua, vía una aproximación sintética). De hecho, una buena forma de entender la dialéctica ideal/real en las matemáticas avanzadas se consigue gracias a una noción de *back-and-forth*[335] epistemológico. El *back-and-forth* ("ir y venir") no solo postula un vaivén pendular entre estratos de idealidad y realidad, sino, sobre todo, un *cubrimiento coherente* de las diversas aproximaciones parciales. Un ejemplo *directo* de esta situación se obtiene con el *back-and-forth* a la Lindström en la teoría abstracta de modelos: la semántica (estrato de realidad, conformado por una colección de modelos con ciertas propiedades estructurales) se entiende a través de una serie de invariantes sintácticos (estratos de idealidad, conformados por lenguajes con otras propiedades *reflectoras* parciales), y, más específicamente, la equivalencia elemental (real) se reconstruye mediante coherencias combinatorias (ideales) dentro de la colección de homomorfismos parciales articulados en el *back-and-forth*. Otros ejemplos *indirectos* aparecen en los estudios de caso que hemos realizado: el progresivo ir y venir en la elucidación de las propiedades funtoriales del espacio de Teichmüller según Grothendieck [96], las amalgamas estructurales por estratos según Shelah [112], las aproximaciones a grupos hiperbólicos y los crecimientos polinomiales de grupos según Gromov [149], etc.

En estos procesos, se enlazan y *reflejan* entre sí los modos de creación de los (cuasi-)objetos matemáticos, sus modos de existencia y los modos con que los conocemos (*transitoriedad general entre fenomenología, ontología y epistemología*). El conocimiento relativo –parcial, jerarquizado, distribuido– de esos tránsitos se convierte entonces en una tarea imprescindible para la epistemología matemática. *Más allá* de intentar definir lo ideal o lo real de una manera *absoluta* (definición que, desde nuestra perspectiva, correspondería a un *problema mal planteado*), la tarea crucial de la epistemología matemática debería consistir en cambio en describir, acotar, jerarquizar, descomponer y recomponer las diversas formas de tránsito entre los múltiples estratos de idealidad y de realidad para los (cuasi-) objetos matemáticos. Mediante las mismas *fuerzas* que impulsan el desarrollo *interno* del mundo matemático, hemos explicitado por ejemplo

---

335 El *back-and-forth* emerge en la prueba de Cantor acerca del isomorfismo entre dos órdenes enumerables lineales densos sin puntos finales. La técnica cantoriana (formalizada modernamente por Hausdorff, 1914) utiliza *aproximaciones* al isomorfismo mediante una colección de homomorfismos parciales que van cubriendo poco a poco (sobreyectividad) los conjuntos, que van preservando los órdenes, y cuyo límite bien comportado proporciona el isomorfismo deseado. Nótense los gerundios, la asintotía y el límite, que anteceden varios de los temas abordados en este capítulo. El *back-and-forth* es luego utilizado por Fraïssé (1954) para caracterizar la equivalencia elemental entre estructuras abstractas (con relaciones arbitrarias, allende los órdenes), y por Lindström (1969) en sus sorprendentes teoremas de caracterización de la lógica clásica de primer orden (maximal con respecto a las propiedades de compacidad y de Löwenheim-Skolem). Desde entonces el *back-and-forth* se ha convertido en una técnica imprescindible en la teoría abstracta de modelos (véase J. Barwise, S. Feferman, eds., *Model Theoretic Logics*, New York: Springer, 1985).

aquí algunas formas contemporáneas de tránsito que poseen un gran poder expresivo y *cognoscitivo*: proto-geometrización, aproximación no clásica, hacificación, transformación de Grothendieck, modulación vía *back-and-forth*.

Otra *apertura* epistemológica importante se obtiene al *mediar* dentro de la dicotomía usual "extensional *versus* intensional", que corresponde *grosso modo* a la dicotomía "conjuntos *versus* categorías". Uno de los *credos* de la matemática conjuntista cantoriana –y, por tanto, de la filosofía analítica tradicional– ha sido la *simetría* del principio de abstracción de Frege, introducida *localmente* por Zermelo con su axioma de separación: dado un conjunto A y dada una fórmula $\varphi(x)$, existe el subconjunto $B=\{a\in A:\varphi(a)\}$, y, por tanto, se tiene la equivalencia (local, dentro del universo acotado A) de $\varphi(a)$ (intensionalidad) con $a\in B$ (extensionalidad). Pero, más allá del *credo* y de una indiscutible comodidad técnica, no hay ninguna razón filosófica, ni matemática, para impedir una *asimetrización* del principio de abstracción de Frege[336]. Un *continuo no cantoriano*, por ejemplo, parece incluir profundas características intensionales, imposibles de realizar en una modelización extensional[337]. De la misma manera, muchas de las caracterizaciones intensionales obtenidas en teoría de categorías para los objetos y procesos matemáticos proveen nuevas perspectivas ("universales relativos") que *no coinciden*[338] con las descripciones extensionales conjuntistas.

Aunque la influencia extensional/analítica/conjuntista ha sido preponderante hasta el momento en la matemática, su contraparte intensional/sintética/categórica adquiere cada vez mayor relevancia, y una nueva "*síntesis de la dualidad análisis/síntesis*" está a la orden del

336 Diversos textos matemáticos consideran que una *ruptura de la simetría* extensión-intensión puede llegar a ser beneficiosa. Desde nuestra perspectiva, esa ruptura de simetría podría corresponder a una *deformación* de las simetrías locales codificadas en el axioma de separación de Zermelo (simetrías que pueden valer fibra por fibra, pero que deben fallar a lo largo de pequeñas deformaciones de las fibras). Véanse, por ejemplo, Jean Bénabou, "Rapports entre le fini et le continu", en: J. M. Salanskis, H. Sinaceur (eds.), *Le labyrinthe du continu*, París: Springer-Verlag, 1992, pp. 178-189; Edward Nelson, "Mathematical Mythologies", ibíd., pp. 155-167; René Thom, "L'anteriorité ontologique du continu sur le discret", ibíd., pp. 137-143.

337 Desde el punto de vista de las bases axiomáticas que se requieren para captar un continuo genérico como el continuo (no cantoriano) de Peirce, la separación local de Zermelo es un postulado demasiado exigente. En cambio, una preeminencia de lo intensional otorga, de entrada, un soporte importante a la *inextensibilidad* del continuo peirceano, es decir, a su indefinibilidad mediante acumulación de puntos. En efecto, al *asimetrizarse* el axioma de separación, sólo ciertas fórmulas dan lugar a clases y puede eliminarse la "existencia" *a priori* de los "puntos": los conjuntos unitarios $\{x\}$ no siempre existen y sólo en ciertos casos específicos (construibles) pueden llegar a ser actualizados. A la vez, al permitir la manipulación de dominios intensionales contradictorios (en lo potencial) sin tener que enfrentarse a asociadas clases extensionales contradictorias (en lo actual) que trivialicen el sistema, se consigue una mayor flexibilidad en una aproximación genérica (libre de ataduras actuales) al continuo. Véase Zalamea, *El continuo peirceano*, op. cit., pp. 84-86.

338 Se trata de una crucial no coincidencia *matemática*, aunque *lógicamente* puedan ser equivalentes. La riqueza matemática de la teoría de categorías, como hemos visto, *no se reduce* a una contraparte lógica del estilo "teoría de topos" ≡ "teoría acotada de conjuntos", sino que se dirige a descubrir simetrías y equilibrios sintéticos, *no observables* desde descomposiciones analíticas.

día. Por supuesto, la *autorreferencia* recién mencionada entre corchetes no sólo no es contradictoria, sino *multiplicadora* dentro de una *jerarquía* del conocimiento. A lo largo de los *capítulos 8 y 9*, hemos intentado fraguar algunas perspectivas mediadoras dentro de esa "*síntesis de la dualidad análisis/síntesis*". Expandiendo nuestro espectro a ámbitos culturales más generales, veremos en los dos capítulos finales cómo las incesantes mediaciones de la matemática contemporánea se entroncan, por un lado, con el "espíritu creativo" (local) del matemático, y, por otro lado, con el complejo y oscilante "espíritu de época" (global) en el que nos hallamos inmersos.

Capítulo 10

Fenomenología de la creatividad matemática

La filosofía tradicional de la matemática tiende a desconocer los modos de emergencia del pensamiento matemático. Algunos textos explícitos acerca de la invención matemática provienen de practicantes de la disciplina, como Poincaré, Hadamard, Grothendieck o Rota, pero, curiosamente, el filósofo de profesión desecha la *fenomenología de la creatividad matemática* como algo ajeno a su reflexión. Sin embargo, en la ciencia, y más generalmente en cualquier área de saber, el surgimiento del conocimiento es (al menos) tan importante como el conocimiento mismo. Como nos recuerda Valéry, "el interés de la ciencia yace en el *arte* de hacer ciencia"[339]: el arte de la invención y las prácticas asociadas a la creatividad conforman el verdadero interés de la ciencia. Esto es aún más patente en el ámbito de las matemáticas, cuya especificidad radica en el tránsito incesante (*ars*) de conceptos, pruebas y ejemplos entre lo posible (abducción), lo necesario (deducción) y lo actual (inducción). Valéry, buen conocedor de las matemáticas y extraordinario investigador de las modulaciones creativas en las veintisietemil páginas de sus *Cahiers*[340], señalaba a su vez que "el origen de la razón o de la noción de razón es tal vez – la *transacción*. Hay que transigir, por un lado, con la lógica; por otro, con el impulso; por otro, con los hechos"[341]. La fenomenología de la creatividad matemática debe enfrentarse a esas transacciones, a esas contaminaciones, a esas impurezas, que finalmente son las que otorgan toda su riqueza a la matemática. La reducción de la filosofía de la matemática a filosofía de la "lógica" (según tendencias usuales de la filosofía analítica, como hemos visto al abordar el *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* [59-62], donde las "Mathematics" desaparecen), o la reducción misma de la filosofía de la matemática a cuestiones de "lógica" y de "hechos" (según tendencias un poco más amplias que tienen en cuenta el enlace de matemáticas y física),

339 Jean Prévost, Paul Valéry, *Marginalia, Rhumbs et autres*, París: Editions Léo Scheer, 2006, p. 229 (cursivas de Valéry).

340 Edición facsimilar, Paul Valéry, *Cahiers*, París: Editions du CNRS (29 tomos), 1957-1961. Edición crítica, Paul Valéry, *Cahiers 1894-1914*, París: Gallimard (9 tomos por el momento), 1987-2003. Antología temática, Paul Valéry, *Cahiers*, París: Gallimard / Pléiade (2 tomos), 1973-1974.

341 Prévost & Valéry, *Marginalia*... op. cit., p. 225 (cursivas de Valéry).

son aproximaciones que dejan de lado el imprescindible "impulso" creativo al que hace referencia Valéry. Intentaremos desbrozar en este capítulo ese *impulso* –aparentemente vago e indefinible– que responde no obstante a toda una compleja red fenomenológica de detonantes y de modos de entronque de la inventividad que pueden hacerse explícitos.

Las herramientas no dualistas que nos pueden permitir una adecuada percepción del tránsito creativo en las matemáticas han estado en el fondo siempre ante nuestros ojos. La obra de Platón –entendida como estudio de la movilidad de los conceptos, como metamorfosis del saber, como descripción de conexiones y entrelazamientos, como análisis fino del ENTRE y del TRANS– ha estado siempre allí, ante nuestros ojos, aunque a menudo mal interpretada. Más allá de ciertas lecturas triviales, se sitúa sin embargo el Platón *dinámico* de Natorp[342], gracias al cual resulta imposible no percibir "el genuino sentido dinámico de la idea", que vuelve "insostenible la interpretación de las ideas como cosas"[343]. El Platón procesal, no estático, no fijado en una cosificación de la idea, que Natorp recupera a comienzos del siglo XX, y que luego retoman por su cuenta Lautman [39] y Badiou [157-158], parece constituir la *base movible*, no dual, que requiere la matemática. Aparente contradicción en términos, la "base" no debería resultar movible bajo las aproximaciones usuales de la filosofía analítica de las matemáticas. No obstante, en la relectura de Platón propuesta por Natorp se observa cómo "los *logoi* no han de regirse por los *onta*", cómo "las definiciones de la matemática definen en realidad métodos, y de ningún modo cosas existentes ni simples propiedades inherentes a esas cosas", cómo la "*kinesis*, el movimiento, la transformación, la marcha, digámosolo así, de los conceptos" rige toda la matemática, cómo la teoría platónica de las ideas se refiere al "método de sus posiciones", a su "devenir, mutación o peregrinación", cómo el pensamiento de Platón "se instala en la posición relativa" y se abre al estudio de lo "correlativo [...], el cambio [...] y la transición"[344]. La matemática, que se encuentra ligada al estudio de los *logoi*, de los métodos, de las representaciones parciales, de las posiciones relativas, como lo hemos corroborado abundantemente en el ámbito contemporáneo, que oscila entre lo *eidal*, lo *quiddital* y lo *arqueal*, puede asumir entonces de entrada, como base movible, ese pensamiento platónico alerta a la transformabilidad de los conceptos/pruebas/ejemplos. La *movibilidad de la base*, imprescindible para entender la obra de Grothendieck [82], subyace así desde el comienzo en la filosofía platónica.

Aprovecharemos más adelante, en este capítulo, los trabajos de Merleau-Ponty, Blumemberg y Rota para ir refinando la "base movible" recién señalada. Pero desde ya –simplemente mediante *la posibilidad y*

---

342 Julien Servois, *Paul Natorp et la théorie platonicienne des Idées*, Villeneuve d'Ascq: Presses Universitaires du Septentrion, 2004. Una excelente y breve introducción al Platón según Natorp se encuentra en Franz Brentano, Paul Natorp, *Platón y Aristóteles*, Buenos Aires: Quadrata, 2004.

343 Ibíd., pp. 120, 92 (en el orden de los textos citados).

344 Ibíd., pp. 30, 35, 36, 55, 57, 72-73.

la plausibilidad de una jerarquía de modulaciones y de "transacciones" permitidas por una filosofía platónica dinámica– pueden entenderse mejor los modos de emergencia de la creatividad matemática. En efecto, por lo pronto, la *tensión entre descubrimiento e invención* en matemáticas puede empezar a acotarse bajo presupuestos "razonables". En el sentido de la "razonabilidad", según Vaz Ferreira (pegamiento de "razón" y "sensibilidad")[345], unos presupuestos platónicos razonables que subtienden la polaridad invención/descubrimiento son: *(i)* la polaridad no es antagónica o dual, sino que, más bien, se *entreteje en red*; *(ii)* diversos tipos de cuasi-objetos, modalidades e *imágenes* transitan en la red; *(iii)* sus *posiciones* (hipótesis/teorema, idealidad/realidad) no son nunca absolutas, sino relativas; *(iv)* una progresiva *gradualidad* determina, dependiendo del contexto en cuestión, la cercanía de los cuasi-objetos matemáticos a uno de los extremos de la polaridad; *(v)* dentro de esa gradualidad, las constataciones de *estructuración* tienden a acercarse (en giros espirales o asintóticos) a procesos de descubrimiento, mientras que las construcciones de *lenguaje* tienden a acercarse (después de otra eventual "vuelta de tuerca") a procesos de invención.

En la emergencia del pensamiento matemático, las *contaminaciones* son legión. Recordemos el magnífico texto de Grothendieck acerca de los motivos [83-84]. La creatividad matemática se distribuye allí en una gran variedad de registros: la "escucha" inicial del motivo (primeridad peirceana), su encarnación en una "multitud de invariantes cohomológicos" (segundidad), su enlace pragmático vía modulaciones del "motivo de base" (terceridad). Pero el proceso no se detiene allí, no es estático, no puede aislarse, y se *itera recursivamente*: dada una cohomología (primera), se estudian los espacios topológicos (segundos) capturados por *esa* cohomología, y luego se determinan los tránsitos (terceros) entre esos espacios codificados por la cohomología dada. Y así sucesivamente: posición *relativa* de un espacio dado, posición *relativa* de un tránsito dado, etc. La matemática procede, entonces, gracias a conexiones maximales de información ("saturaciones" diría Lautman) dentro de *estratos evolutivos* del saber. La creatividad emerge a lo largo de esa variable multiplicidad: gracias a "impulsos" e hipótesis singulares, gracias a ejemplos que permiten visualizar el entronque entre las hipótesis y los conceptos, gracias a formas inventivas de demostración que permiten asentar la corrección del entramado. De hecho, la metodología de la investigación científica según Peirce –ciclo entre abducción (primera), deducción (tercera) e inducción (segunda)– encarna paradigmáticamente en las matemáticas, si se entiende, y *extiende*, el "ciclo" planar a una *espiral tridimensional*, recursiva y ampliativa.

---

345 Carlos Vaz Ferreira, *Lógica viva*, Caracas: Biblioteca Ayacucho, 1979. Sobre la "razonabilidad" en Vaz, véase Arturo Ardao, *Lógica de la razón y lógica de la inteligencia*, Montevideo: Marcha, 2000. Los trabajos de Vaz Ferreira (Uruguay, 1872-1958) abren compuertas muy interesantes (y desaprovechadas) para ósmosis *naturales* entre ciencias "puras" y ciencias "humanas".

El seguimiento de algunas imágenes en la obra de Grothendieck ayuda también a entender la espiralidad ampliativa de la creatividad matemática. Desde el "diluvio de cohomología" [90] expresado en su correspondencia con Serre (1956), hasta su visión musical de la cohomología motívica [83] en *Cosechas y siembras* (1986), pasando por la construcción técnica de las grandes cohomologías (1964) que llevarían a la resolución de las conjeturas de Weil [82, 90], Grothendieck parte de una imagen vaga (primeridad, abducción: diluvio), que somete al filtro complejo y extenso de la definibilidad y la deducción (terceridad, deducción: cohomología *étale*), que luego contrasta con otros invariantes (segundidad, inducción: otras cohomologías), y que le incita a una nueva visión (primeridad, abducción: motivos, musicalidad). Es de notar que la inventividad matemática *no se restringe* únicamente a los ámbitos abductivos, primeros, donde evidentemente prima la hipótesis creativa, sino que también ocurre tanto en los ámbitos demostrativos, como en los ámbitos de contrastación mediante ejemplos. De hecho, como lo sugiere la *base movible* platónica, la invención o el descubrimiento no son absolutos, sino siempre *correlativos*, con respecto a un caudal dado de información, ya sea formal, natural o cultural. En el tránsito anterior, por ejemplo, Grothendieck *descubre* los motivos, aunque Voevodsky [84, 146] *inventa* luego la manera de representarlos. De igual manera, Zilber *descubre* la emergencia de "grupos por todas partes" [144] escondidos en la teoría de modelos, aunque solo después, junto con Hrushovski, *inventa* las geometrías de Zariski [144], que le permiten representar esa ubicuidad de los grupos. Los ejemplos podrían repetirse a profusión, y parecen regirse por una primera tipología elemental: una *percepción/visión/imaginación de una situación genérica*, asociada a un gran espectro de aplicabilidad (ámbito del descubrimiento), que se *entrelaza* (sin determinaciones de prioridad acerca de la *dirección* del enlace) con una *construcción/armazón/realización de múltiples concreciones particulares* dentro del espectro de aplicabilidad adoptado (ámbito de la invención). Una vez más, nos enfrentamos así a lo Uno (descubrimiento) enlazado con lo Múltiple (invención), a lo largo de un complejo y movible cálculo integral y diferencial abstracto.

El *tránsito recursivo modal* entre lo posible, lo actual y lo necesario es una de las fortalezas mayores de la creatividad matemática. La *conjunción* de los tres términos resaltados ("transitoriedad", "recursividad", "modalidad") explica en cierta medida la especificidad del pensamiento matemático. Por un lado, hemos visto cómo, a lo largo del siglo XX, con los trabajos de Gödel, Grothendieck, Lawvere, Shelah, Zilber o Gromov, entre muchos otros, la matemática ha abierto compuertas imprescindibles a lo *relativo*, pero siempre buscando adecuados *invariantes* detrás del movimiento: se reconoce la transitoriedad de (cuasi-)objetos y procesos, pero se buscan algunos modos ubicuos en su flujo (salto epistemológico del "¿qué?" al "*¿cómo?*"). Por otro lado, también hemos visto cómo la jerarquización de la matemática involucra incesantes procesos de *autorreferencia*, que dan lugar a un conocimiento recursivo de los (cuasi-)objetos y procesos en juego: se distribuye el saber en capas y estratos (matemática como arquitectónica), y la interrelación de las informaciones locales da pistas acerca de la visión global de los "entes" matemáticos. Finalmente, hemos observado cómo las combinaciones *libres* (primeras), dentro de lo abstracto y lo posible, se contrastan con hechos (segundos) del mundo físico, y ayudan a encarnar la comprensión (tercera) del cosmos en su conjunto: los vaivenes entre matemáticas y física han sido permanentes, y se encuentran de nuevo en asombroso auge (Arnold, Atiyah, Lax, Witten, Connes, Kontsevich). Entre la *libertad* inventiva de los conceptos y las *restricciones* inductivas y deductivas del cálculo, se sitúa la matemática.

En ese entorno de flujos y obstrucciones, un pensamiento general de los *residuos* y las *sedimentaciones* resulta ser de gran ayuda para entender mejor los procesos de génesis en curso en la matemática. Merleau-Ponty propone constituir una ciencia de las "sedimentaciones"[346], donde se vuelva a cerrar el ciclo hombre-naturaleza, gracias a un cuerpo *operante* que entrelace lo visible y el vidente, es decir, que conjugue un horizonte de mundo general (lo visible) y un horizonte de submundo (lo visto por el vidente), a su vez *inserto* dentro del primer horizonte. El conocimiento radicado en un cuerpo, pero mezclado con una red de horizontes de mundo, rechaza la cesura cartesiana mente-cuerpo y vuelve a conectar en forma *continua* el saber y la naturaleza. Nada sucede "fuera del mundo", de los sentidos, de la visión en particular. Los horizontes culturales, las contextualizaciones de los intérpretes, las sedimentaciones, resultan imprescindibles en todo saber, y, en particular, en la matemática, que se torna profundamente humana. La fenomenología enlaza el ojo humano, los horizontes de mundo generales donde se inserta la visión, y los subhorizontes particulares en donde las "cosas" renacen a través del cuerpo del observador. Así, sobre un fondo perceptivo, se van acumulando los sedimentos de la cultura, del conocimiento, de la vida social, y las "cosas" se modalizan a lo largo de múltiples horizontes, donde se van detectando sus variados registros (*estructura, fibración, función, sensación*, etc.). La forma y el fondo dejan también de dualizarse y se enlazan en un continuo, incisivo y visible en las manifestaciones modernas del arte (Mallarmé, Proust, Cézanne, revisados por Merleau-Ponty), pero también, como hemos visto, en las manifestaciones contemporáneas de la matemática.

En *El ojo y el espíritu*, Merleau-Ponty describe al cuerpo operante en los dominios del saber como un "haz de funciones que entrelaza visión y movimiento" [86]. Como lo señalábamos, ese haz sirve de *intercambiador* (al estilo Serres) entre lo real y lo imaginario, entre el descubrimiento y la invención, y permite capturar la *transformación continua de una imagen hacia su revés*, a lo largo de las diversas visiones de los intérpretes. Dos de las tesis mayores del último Merleau-Ponty combinan la necesidad de pensar la dialéctica *recto/verso* y de pensar continuamente:

346 Merleau-Ponty, *Notes des cours...*, op. cit., p. 44.

(1) *Lo propio de lo visible es tener un doblez de invisibilidad en un sentido estricto.*
(2) *El despliegue del mundo sin pensamiento separado es precisamente ontología moderna*[347].

Como hemos venido observando, muchas construcciones específicas de la matemática contemporánea permiten corroborar, con el soporte técnico deseado, estas dos tesis de Merleau-Ponty. El "doblez de invisibilidad" es particularmente impactante en lo que hemos llamado la "impureza estructural de la aritmética" [31], donde los hitos más importantes que llevan a la resolución del Teorema de Fermat [106] son literalmente *invisibles* desde la perspectiva discreta de los naturales, sin pasar por el *revés* de los números complejos. Así mismo, el "despliegue" de la matemática, sin subregiones separadas, constituye una de las fortalezas mayores de la matemática contemporánea, y, en particular, subyace detrás de la excepcional riqueza del pensamiento de Grothendieck, siempre transgresor de barreras artificiales y explorador de *conexiones naturales continuas* entre imágenes, conceptos, técnicas, ejemplos, definiciones o teoremas aparentemente distantes.

La "manera" [89], o el estilo, en que los grandes matemáticos producen sus obras es otra problemática que la filosofía analítica de las matemáticas deja intrínsecamente de lado. Los trabajos de Javier de Lorenzo [48-49] han abierto aquí, desde hace ya varias décadas, una brecha importante que no ha sido sin embargo suficientemente aprovechada. En la segunda parte de este trabajo hemos descrito algunos registros concretos de *formas locales* de hacer matemática, que no hemos analizado (y no podremos hacerlo: labor de otro ensayo) desde el punto de vista de la *conformación global* del estilo. Sin embargo, desde la perspectiva fenomenológica sobre la creatividad aquí adoptada, pueden precisarse algunas formas de solapamiento y de sedimentación, que, *contrapunteando* [118] con formas de quiebre y de ruptura, ayudan a delinear el *espectro estilístico* de los creadores matemáticos. En efecto, una constatación básica indica que el creador matemático procede por ejercicios graduales de *vaivén* ("*back-and-forth*") entre imágenes genéricas (poderosas, vagas) y diversas restricciones sucedáneas (definiciones, teoremas, ejemplos) que le permiten ir acotando los "impulsos" o intuiciones originarias. El *contrapunteo* entre el solapamiento deductivo y la ruptura imaginal es entonces *necesario* en las etapas iniciales de la creación, aunque, luego, la sedimentación tienda a imponerse abrumadoramente sobre el quiebre.

Ese tejido contrapuntístico involucra modos peculiares de encaje y de correlación. Tal vez cercana solo a la música en ese sentido, la matemática descubre *tanto* simetrías/armonías, *como* rupturas de simetría/armonía, que luego debe decantar a través de múltiples desarrollos, variaciones, modulaciones, en lenguajes bien definidos que permiten ir dándole "cuerpo" a las grandes armonías o rupturas, vistas o "escuchadas" en primera

---

347 Ibíd., pp. 85, 22 (en el orden de los textos citados).

instancia (recuérdese a Grothendieck, a la escucha de la "voz de las cosas" [86, 90]). La *razonabilidad* (= razon(a)(sensi)bilidad, en el sentido de Vaz Ferreira) es aquí imprescindible, pues deben literalmente *pegarse* una sensibilidad libre, diagramática, imaginal (ámbito de la *estética*), y una razón normativa, ordenadora, estructuradora (ámbito de la *ética*), ya sea en las largas anotaciones del pentagrama o en las largas series de deducciones matemáticas. Pero la *coherencia polar* misma de la creatividad matemática (que *no* ocurre en cambio en la creación musical) nos obliga a observar el *revés* de esta situación, *contrapunteándola* gracias a una "razón estética", inventiva y liberadora, y, sobre todo, gracias a una "sensibilidad ética", contrastada y comunitaria. Por ello la matemática consigue trascender la imaginación sin riendas del individuo aislado, y se convierte en la mayor construcción imaginaria posible de una *comunidad* en conjunto.

Las aceleraciones y desaceleraciones en los procesos de "pegamiento" matemático entre imágenes conjeturales, hipótesis parciales, residuos imaginarios, ejemplos reales y sedimentaciones teoremáticas cubren las más diversas situaciones posibles. En muchos ascensos *eidales* pueden llegar a primar visiones genéricas y estratificaciones deductivas, por encima de contrastaciones secundarias (residuos, ejemplos): es el caso, por ejemplo, de los EGA de Grothendieck-Dieudonné [94-95], de la concepción de una teoría de conjuntos sin elementos en Lawvere [111], de los inicios del programa funtorial de Langlands [103], o de la primera percepción de los teoremas de no estructura en Shelah [111]. A su vez, en lo que hemos llamado descensos *quidditales*, la riqueza de los residuos, obstrucciones y ejemplos (ecuaciones diferenciales a la Atiyah o Lax, grupos no conmutativos o cuánticos a la Connes o Kontsevich), tiende a primar sobre las imágenes "primordiales", los instrumentarios genéricos, o las maquinarias deductivas. En los hallazgos *arqueales* que hemos señalado (del tipo "núcleos geométricos" en Zilber o Gromov, o del tipo "núcleos lógicos" en Freyd o Simpson), *no* se observa una direccionalidad o predominancia especial en la combinatoria de imágenes, hipótesis, residuos, ejemplos, definiciones o teoremas, con los cuales se develan los arquetipos matemáticos que "dominan" correlativamente ciertas clases de estructuras. De hecho, en estos últimos trabajos, particularmente alrededor de Zilber y de Gromov, el *incesante vaivén* entre lo más concreto y lo más abstracto no solo es *inatajable*, sino que constituye una suerte de *maniera* realmente original, sistemáticamente oscilatoria, que podríamos considerar tal vez propia de la "escuela" rusa.

Volviendo a revisar la obra de Nicolás de Cusa, Hans Blumemberg recuerda que el mundo se divide en "*visibilia*, *invisibilium imagines* [«cosas» visibles, imágenes de lo invisible]", y cómo el universo de las "*mathematicalia* [«cosas» matemáticas]" permite refinar la mirada gracias a una clara "ventaja metodológica: la disponibilidad para efectuar libremente variaciones, la posibilidad de experimentar estableciendo libremente las condiciones”[348]. Hemos ya subrayado la fundamental *libertad* de las matemáticas, su riqueza variacional en el ámbito de los *possibilia* y su capacidad para adentrarse en la dialéctica de los *visibilia* y el *invisibilium*. En buena medida, esa plasticidad se debe a otro profundo contrapunto dentro de la creatividad matemática: el vaivén pendular entre lo *metafórico* y lo técnico. La matemática no solo ha sido productora de metáforas *externas* para el desarrollo del pensamiento, sino que, a menudo, procede *internamente* –en sus procesos de creación– gracias a metáforas vagas y potentes, aún alejadas de acotaciones técnicas precisas. Es curioso que, aquí, la filosofía analítica de las matemáticas haya proscrito el estudio de la *metafórica matemática*, como algo impropio del saber exacto, cuando, a su vez, todo su programa emerge de metáforas explícitas, convertidas luego en *mitos*, como lo señala Rota [53]: atomismo, absoluto, dualismo, fundamento, verdad, etc.

Una fenomenología de la metafórica matemática merece aprovechar los extensos trabajos de Blumemberg[349] en el seguimiento histórico de las metáforas y en sus esfuerzos por abrir un espacio a la legitimidad de las metáforas en el lenguaje filosófico. Partiendo de la antinomia fundamental (Husserl) entre la *infinitud* de la tarea filosófico-científica y la *finitud* de las individualidades humanas, Blumemberg estudia el complejo retículo de entronques y quiebres entre el “tiempo del mundo” y el “tiempo de la vida”, donde las matemáticas representan un papel de excepción. Al revisar la *Lógica* de Husserl de 1929, Blumemberg resalta cómo el maestro introduce la metáfora de una “*sedimentación histórica como producto de una idealidad estática de origen dinámica*”[350]. La *aparente* contradictoriedad de la metáfora se debe a apropiaciones dispares de Platón (lectura estática *versus* lectura dinámica neo-kantiana por Natorp, retomada por Husserl), pero recoge perfectamente varios de los modos primordiales de la creatividad matemática que hemos venido resaltando. La creatividad procede dentro del “tiempo de la vida”, dentro del cuerpo operante de Merleau-Ponty, pero extendiéndose siempre al “tiempo del mundo” que lo envuelve; la sedimentación es entonces histórica, y ocurre a lo largo de una red de posiciones ideales, aparentemente estáticas, pero que emergen sobre un fondo de mediaciones polares dinámicas. De hecho, la matemática –entendida como estudio de los tránsitos exactos del saber (“dinámica”)– construye invariantes parciales (“idealidad estática”) para medir las

---

348 Hans Blumemberg, *Paradigmas para una metaforología* (1960), Madrid: Trotta, 2003, pp. 242-243.

349 Monografías mayores: *Paradigmas para una metaforología* (1960), *La legitimidad de la Edad Moderna* (1966), *La génesis del universo copernicano* (1981), *La legibilidad del mundo* (1981), *Tiempo de la vida y tiempo del mundo* (1986), *Salidas de caverna* (1989). Ensayos (joyas) menores: *Naufragio con espectador* (1979), *La risa de la muchacha tracia* (1987), *La inquietud que atraviesa el río* (1987), *La pasión según San Mateo* (1988). Una buena presentación de la obra de Blumemberg se encuentra en Franz Josef Wetz, *Hans Blumemberg. La modernidad y sus metáforas*, Valencia: Edicions Alfons el Magnànim, 1996.

350 Hans Blumemberg, *Tempo della vita e tempo del mondo*, Bologna: il Mulino, 1996, p. 391.

obstrucciones y las ósmosis en el tránsito, y acumula posteriormente ("sedimentación histórica") los diversos registros obtenidos.

En la mediación incesante entre dinámica y estática, realidad e idealidad, mundo y vida, el *Fundierung* según Rota –quien retoma también y reinterpreta a modo personal las ideas de Husserl– combina dos procesos centrales en la construcción de la redes matemáticas: *facticidad* y *funcionalidad*[351]. Para Rota, un (cuasi-)objeto matemático –a lo largo de sus múltiples formas, desde la imagen metafórica vaga hasta el (sub-)objeto técnico cuidadosamente definido y acotado, pasando por modos, ejemplos y lemas intermedios– debe, por un lado, insertarse pragmáticamente en un contexto (facticidad), y, por otro lado, contrastarse correlativamente en el contexto (funcionalidad). La matemática –que vive *sintéticamente* tanto a nivel fáctico (contextualización) como a nivel funcional (correlación)– resulta ser entonces irreducible a una pretendida "objetualidad". El *Fundierung* estudia cómo los *procesos* matemáticos se enlazan unos con otros, *independientemente* de su desglose analítico (vía $\in$ o $\subseteq$). Los procesos (o cuasi-objetos) se entienden como *polos* de una relación de *estratificación*, con gradaciones complejas entre ellos. La matemática estudia los procesos de transformación y empalme de esas diversas gradaciones, *independientemente* de un ilusorio "fundamento" último que las sostenga. Más allá de unos supuestos "objetos" matemáticos, estables y bien fundamentados, las *redes de acople fáctico y funcional* entre los cuasi-objetos matemáticos en su sentido más lato posible (metáforas, ideas, procesos, conjeturas, ejemplos, definiciones, teoremas) constituyen entonces el verdadero espectro de los fenómenos matemáticos.

Una fenomenología que pretenda capturar –de manera adecuadamente fiel y no reduccionista– los tránsitos de la matemática debe tener en cuenta múltiples polaridades: descomposiciones analíticas y recomposiciones sintéticas, modos de diferenciación y de integración, procesos de localización y de globalización, particularidades y universalidades, formas de creatividad y de descubrimiento, entre otros. Como hemos visto en los capítulos anteriores, el *ir y venir* diferencial-integral no solo se sitúa en un nivel epistemológico ("cómo"), sino que se *extiende continuamente* al "qué" y al "dónde" de los cuasi-objetos en juego. Los múltiples estratos/ambientes/contextos de la matemática, siguiendo el *Fundierung* de Rota, responden así a un complejo ordenamiento del prefijo *trans*, tanto en el nivel óntico como en el epistémico, rompiendo las barreras usuales de la reflexión filosófica.

Una *conceptualización minimal* del *trans* requeriría considerar al menos las siguientes *operaciones*:

351 Palombi, *La stella e l'intero...* op. cit., p. 62.

(A) Polaridades (o "adjunciones"):

- descomposición / composición
- diferenciación / integración
- desiteración / iteración
- particularización / universalización
- localización / globalización
- residuación / potenciación.

(B) Mediaciones:

- oscilación
- mixturación
- triadización
- modalización
- hacificación.

Figura 14. *Polaridades y mediaciones dentro de una operatividad general del* TRANS

La filosofía analítica de las matemáticas descarta, dentro de sus ámbitos de investigación, las mediaciones recién señaladas, lo que puede explicar tal vez su inadecuación para captar el universo de las matemáticas avanzadas. El primer par dual ("descomposición/composición") recoge la *necesaria e irreducible* dialéctica, a lo largo de toda la historia de la filosofía y de la matemática, entre análisis y síntesis. A su vez, la primera mediación ("oscilación") recoge una *necesaria e irreducible* variación pendular del pensamiento, siempre tensionado entre polaridades opuestas. La segunda mediación ("mixturación" a la Lautman) acompaña esa inevitable oscilación pendular con la conciencia de deber construir mixtos que sirvan de apoyos cabales a una razón extendida ("razonabilidad"), entendiéndose aquí mixtura en el sentido de *sunthesis* (composición, por tanto reversible), en forma opuesta a *sunchusis* (fusión, usualmente irreversible). El segundo par dual ("diferenciación/integración") recoge una de las problemáticas originarias mayores del pensamiento filosófico y matemático: la dialéctica de lo múltiple y lo uno. El tercer par dual ("desiteración/iteración"), junto con las mediaciones tercera ("triadización") y cuarta ("modalización"), constituye una riqueza mayor de las matemáticas avanzadas, usualmente *invisible* dentro de estratos elementales o desde perspectivas analíticas, pero que se refleja en cambio con gran acumen en el núcleo operativo original de la arquitectónica peirceana [64-68]. De hecho, el énfasis peirceano en las reglas de desiteración/iteración representa uno de los aportes más profundos de Peirce, ya sea desde un punto de vista lógico (las reglas codifican las definiciones de conectivos), ya sea desde un punto de vista cognoscitivo (las reglas codifican las transferencias *creadoras* de información). Similarmente, la triadización sistemática peirceana y su filtración modal aseguran la riqueza plural de la arquitectónica pragmaticista.

Los pares duales cuarto ("particularización/universalización") y quinto ("localización/globalización"), junto con la quinta mediación ("hacificación"), responden más específicamente a formas del pensamiento matemático contemporáneo. La hacificación permite, en ciertos casos bien delimitados, pegar coherentemente la información local y llegar a cuasi-objetos globales que capturan el tránsito de la información en las fibras del haz. La matemática se ocupa entonces, en gran medida, en calibrar las ósmosis y las obstrucciones calculables en esos "ires y venires" entre propiedades locales y globales, en los ámbitos del espacio, del número, de la estructura, de la forma. A su vez, el sexto par dual ("residuación/potenciación") captura la riqueza de ciertos estratos de la matemática con grandes propiedades de coherencia (como el cálculo de la variable compleja, o la teoría de topos), donde los residuos llegan a ser (cuasi-) objetos completamente *reflectores* de su entorno, y potenciadores de las posibilidades visionarias del matemático.

En todos los procesos anteriores, se enriquece el *summum bonum* peirceano, entendido como "crecimiento continuo de la potencialidad"[352], y la creatividad matemática explota en las formas más diversas. Las *redes metafóricas y analógicas* estudiadas por Châtelet [56-57] se combinan con precisos modos de sedimentación –ejemplos, definiciones, teoremas– y emerge un sofisticado "cálculo integral y diferencial" de mediaciones y gradaciones (*Fundierung*), que permite orientar la evolución del pensamiento matemático. La "racionalidad" demostrativa *convive* entonces con la "razonabilidad" imaginaria: en los procesos de articulación/mediación/pegamiento de los diversos "pares duales" recién mencionados yace la maleabilidad inventiva de la disciplina. Se trata de una plasticidad peculiar, que combina una feliz capacidad de movimiento (facilidad del tránsito en el mundo de los posibles) y un cuidadoso manejo de diferenciales dinámicos (control del cambio en el ámbito de la exactitud). Tal vez en esa *conexión de plasticidad y exactitud* yace la verdadera fortaleza de la matemática, una conexión crucial en los procesos de *creación* matemática. Cualquier mirada que deje de lado ese plástico "*arte* de hacer" [183] dejaría entonces de observar el *núcleo vivo* mismo de la disciplina.

Serre –quien debe ser considerado sin duda como uno de los *estilistas* mayores de la literatura matemática contemporánea– señalaba la importancia de las "mixturas" en la creatividad matemática, así como la presencia de una imprescindible penumbra inventiva ("trabajo de noche (medio-dormido) [que] permite más fácilmente intercambiar temas" [101]) detrás de una supuesta luminosidad demostrativa. Podría decirse, observando el pulimiento casi *cristalográfico* de la obra del mismo Serre, que el alto matemático creador consigue enlazar su trasiego constante

352 Para una excelente presentación del lugar que ocupa, dentro del sistema de Peirce, una "razonabilidad" amplia, orientada por el *summum bonum*, y para un estudio de sus correlaciones con la sensibilidad, la creatividad y la acción, véase: Sara Barrena, *La creatividad en Charles S. Peirce: abducción y razonabilidad*, Tesis Doctoral, Departamento de Filosofía, Universidad de Navarra, Pamplona, 2003 (publicación parcial de la tesis en: Sara Barrena, *La razón creativa. Crecimiento y finalidad del ser humano según C.S. Peirce*, Madrid: Rialp, 2007). Más allá del mismo Peirce, los trabajos de Barrena representan una notable aportación a la comprensión de la creatividad en general.

de la penumbra (ámbito del descubrimiento) con una inusual capacidad para develar/construir cristales luminosos (ámbito de la invención) en su zigzagueante camino. De hecho, resulta notable que el estilo límpido de Serre, asombrosamente suave y "minimal", emerja, en palabras del mismo autor, como una "maravillosa mixtura" situada sobre un fondo de penumbra. En el mismo sentido, muchas *joyas cristalográficas* de la matemática contemporánea se elevan sobre ciertos *fondos oscuros* que las ven nacer: los motivos de Grothendieck con su musicalidad en tonos mayores y menores [83], la carta de Langlands a Weil con su supuesta no seriedad y tono casual [103-104], el teorema del índice de Atiyah con su excavación en profundidades faltas de claridad [120], el sueño de Cartier con sus movedizos terrenos en física matemática [128], la alternativa extendida de Zilber con su oscura intuición del comportamiento lógico de la exponencial compleja [145], el *h*-principio de Gromov con su fondo de situaciones discordantes en la penumbra de las ecuaciones diferenciales [149], entre muchos otros ejemplos que abordamos en la segunda parte de este trabajo.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, la creatividad matemática avanzada solo puede ser entendida por medio de perspectivas que *reflejen* la fenomenología misma de tránsitos matemáticos no trivializados: entretejimientos en red, gradaciones no dualistas, contaminaciones sobre un continuo, enlaces recursivos modales, dialécticas de sedimentaciones y residuos, ósmosis parciales entre imágenes metafóricas y objetos técnicos, pegamientos globales a lo largo de acotaciones coherentes locales, procesos de entreveramiento fáctico y funcional (*Fundierung*), mediaciones sistemáticas entre polaridades. En el ámbito de las matemáticas elementales, estas manifestaciones tienden a desaparecer, debido a la complejidad reducida de los entes en cuestión. Por otro lado, desde las perspectivas de la filosofía analítica, e independientemente del ámbito observado, ya sea elemental o avanzado, estas manifestaciones también son dejadas de lado, pues se consideran usualmente "mal definidas" o imposibles de definir (esperamos haber mostrado en los *capítulos 8 y 9* que éste *no* es el caso). Tal vez estas dos tendencias –unidas con la predominancia, en filosofía de las matemáticas, del estudio de lo elemental bajo perspectivas analíticas– permitan explicar el poco cuidado que se ha venido otorgando hasta el momento a la problemática de la creatividad matemática.

Capítulo 11

Matemáticas y circulación cultural

En este capítulo final abordaremos dos últimas consideraciones que pretenden redondear nuestro trabajo. Si en los *capítulos 8-10* hemos resaltado un giro a cuestiones ligadas al "¿cómo?" en la matemática contemporánea, y si en los *capítulos 4-7* hemos revisado en detalle algunas emergencias ("¿dónde?") de problemáticas precisas y acotadas ("¿por qué?"), en este capítulo estudiaremos, por un lado, el entrelazamiento *general* que permite distinguir las matemáticas contemporáneas (1950-hoy) de las matemáticas anteriores (*sincronía conceptual* "qué/ cómo/ por qué", más allá de un corte meramente diacrónico en los alrededores de 1950) y, por otro lado, el posicionamiento *general* del pensamiento matemático dentro de la cultura, en particular las formas en que colinda naturalmente con la estética (*geografía conceptual* del "¿dónde?").

En el *capítulo 1* habíamos distinguido –desde perspectivas "aéreas" (es decir, tanto distantes como evanescentes)– algunos rasgos que permitían separar, en primera instancia, las matemáticas modernas (desde Galois hasta entornos de 1950) y las matemáticas contemporáneas (desde entornos de 1950 hasta hoy). Resumimos en la tabla siguiente esas características (*(i)-(v)* implícitas en la obra de Lautman [25], *(vi)-(x)* implícitas en los desarrollos de la matemática contemporánea [31]), y explicitamos luego cuáles son los *fondos sincrónicos conceptuales* que pueden ayudar a explicar tanto las características *(i)-(v)* y *(vi)-(x)* como los cortes diacrónicos situados alrededor de 1830 (comienzos de la matemática moderna) y 1950 (comienzos de la matemática contemporánea):

	matemáticas modernas (1830-1950)	matemáticas contemporáneas (1950-hoy)
(i) compleja jerarquización sistemas de mediaciones	√	√
(ii) riqueza semántica irreducibilidad a gramáticas	√	√
(iii) unidad estructural múltiples polaridades	√	√
(iv) dinámica movimientos libertad-saturación	√	√
(v) mixturación teoremática ascensos y descensos	√	√
	• tránsitos / obstrucciones • jerarquías / estructuras • modelización / mixturación	
(vi) impureza estructural aritmética vía continuo		√
(vii) geometrización ubicua núcleos geométricos arqueales		√
(viii) esquematización caracterizaciones categóricas		√
(ix) fluxión y deformación revés de propiedades usuales		√
(x) reflexividad formas complejas de autorreferencia		√
		• fluxiones / alternaciones • esquemas / núcleos • reflexión / hacificación

Figura 15. *Algunos rasgos conceptuales que ayudan a demarcar las matemáticas modernas y las matemáticas contemporáneas*

En lo que sigue, en la primera parte de este capítulo estudiaremos algunas formas de *circulación interna* dentro del ámbito conceptual de las matemáticas, que ayudan a distinguir intrínsecamente ciertos periodos de producción matemática; en la segunda parte, estudiaremos algunas formas de *circulación externa* dentro del ámbito general de la cultura, que ayudan a explicar mejor, mediante correlaciones y contrastaciones adecuadas, ciertos modos de la creatividad matemática. En un ejercicio *contrapuntístico*, intentaremos ir acotando el "por qué" de la emergencia de la matemática moderna y el "por qué" de su evolución posterior hacia las preguntas, métodos e ideas de la matemática contemporánea. Realizaremos así una discusión de las características *(i)-(v)* detectadas por Lautman, tanto por el lado positivo como por su *revés*, lo que nos conducirá en forma *natural* hacia las características *(vi)-(x)* donde se reflejan algunos rasgos importantes de los nuevos fondos conceptuales en juego dentro de la matemática contemporánea.

La matemática moderna emerge básicamente gracias a las obras de Galois y de Riemann, con la introducción de herramientas *cualitativas* para controlar problemáticas cuantitativas, tanto desde un punto de vista positivo (tránsitos) como *negativo* (obstrucciones). En efecto, por un lado, el enlace estructural de la jerarquía de subgrupos de Galois y de las extensiones de campos permite controlar el comportamiento de las raíces de las ecuaciones (y, asegurar, entre otras cosas, la *no* resolubilidad de la quíntica general); por otro lado, las propiedades topológicas de las superficies de Riemann permiten controlar la ramificación de las funciones multivalentes de variable compleja (y asegurar, por ejemplo, la *no* equivalencia de superficies como una esfera y un toro). Desde los inicios mismos de la matemática moderna, esta se enfrenta a una problemática genérica claramente definible: *(A) estudio de los tránsitos y obstrucciones de los objetos matemáticos, mediante herramientas cualitativas, asociadas a mediaciones y jerarquías estructurales.* Este fondo conceptual en juego se refleja parcialmente en las características *(i)-(v)* mencionadas arriba, y corresponde a un enfoque realmente fresco y novedoso en la percepción matemática, la cual se abre *sistemáticamente* desde entonces a una comprensión cualitativa de los fenómenos y a un entendimiento reflexivo de las *limitantes* mismas (negación, revés, obstrucción) de esa comprensión parcial.

La *compleja jerarquización –(i)–* de la matemática debida a Galois y Riemann da lugar a muchas de las ramas más ricas de la matemática moderna (álgebra abstracta, análisis funcional, topología general, etc.), pero es un proceso (o, mejor, una colección de procesos) que tiende naturalmente a saturarse en cada nivel de las jerarquías estructurales en cuestión. Por ejemplo, detrás de una profusión de semigrupos y grupos, ocurre luego, en la matemática contemporánea, una *esquematización –(viii)–* que abre compuertas a los grupoides en topos generales, o, aún más esquemáticamente, a los *operads* [134]. Por un lado, la notoria *unidad estructural –(iii)–* de la matemática moderna (solidez unitaria que constituye tal vez su distintivo más saliente) se contrapone, en la matemática contemporánea, con una sofisticada *extensión* de lo unitario hacia los bordes polares de esa unidad dialéctica, con una capacidad enteramente original [114, 131, 149, etc.] para enfrentar las *fluxiones y deformaciones –(ix)–* de estructuras que parecían sólo poder entenderse rígidamente. Por otro lado, la notable *riqueza semántica –(ii)–* de la matemática moderna, con la enorme multiplicidad de modelos que surge en el periodo 1870-1930, en todos los ámbitos de acción matemática (geometrías, conjuntos, álgebras, espacios funcionales, topologías, etc.), da lugar posteriormente a una mirada *reflexiva –(x)–* de esa diversidad, con la cual empiezan a construirse paralelamente las herramientas necesarias de reintegración de lo local/diferencial en lo global/integral.

La *teoría de haces*, cuya construcción puede rastrearse específicamente en el periodo 1943-1951 (síntesis conceptual representada en la *figura*

13, emergencia diacrónica ya observada [92, 161]), constituye aquí para nosotros el *índice decisivo* que permite capturar los cambios/delimitaciones entre la matemática moderna y la matemática contemporánea. De hecho, los haces consiguen simbolizar, *tanto en su fondo conceptual como en su técnica*, una de las grandes problemáticas generales de la matemática en las últimas décadas: *(B) estudio de las fluxiones y deformaciones (aritmético-continuas, no clásicas) de los cuasi-objetos matemáticos, mediante herramientas de traslado/bloqueo entre lo local y lo global, asociadas a procesos de esquematización y autorreferencia.* Por supuesto, esta problemática, delineada muy desde lo alto, deja de lado otras importantes vertientes aplicadas, calculísticas o computacionales de las matemáticas contemporáneas, pero es claro también que incluye en gran medida aspectos de las obras de muchos matemáticos mayores de la segunda mitad del siglo XX, en particular aspectos centrales de *todas* aquellas obras que hemos revisado detenidamente en los *capítulos 4-7*.

La matemática contemporánea se inscribe así en un espectro plenamente *bimodal*, en el sentido de Petitot: *a la vez* físico y morfológico-estructural. En efecto, como hemos visto con Rota, los cuasi-objetos de la matemática encarnan *a la vez* fáctica y funcionalmente [191]. La vivencia y el conocimiento se realizan en entornos relativos de transformación de la información, y no sobre trasfondos absolutos. La *inteligencia* matemática consiste entonces en los modos de procesamiento del saber que *llevan de la in/formación a la trans/formación*, modos que incluyen tanto la desmembración *analítica* de la información como la recomposición *sintética* de las representaciones obtenidas dentro de horizontes correlativos. Lo bimodal y lo bipolar, que dan lugar a gradaciones progresivas y a precisas *condiciones de frontera* en el tránsito, llevan a las naturales mediaciones/mixturas características del saber matemático. Dentro de esa incesante búsqueda por determinar con precisión y corrección los múltiples bordes de los cuasi-objetos matemáticos, las grandes problemáticas *(A)* y *(B)* de las matemáticas modernas y contemporáneas responden a fondos conceptuales bien determinados con respecto a ciertas condiciones de frontera: respectivamente, *(A)* aborda la *de/limitación* de clases de estructuras clásicas, como una primera aproximación que *fija* parcialmente ciertas coordenadas en el saber moderno, mientras que *(B)* aborda la *extra/limitación* de las clases anteriores, deformándolas y diferenciándolas (localidad) para luego reintegrarlas (globalidad), como una segunda aproximación que *libera* ciertas variaciones en el saber contemporáneo.

El resultado neto de la conjunción de las problemáticas *(A)* y *(B)*, situación en la que nos encontramos actualmente, consiste en una comprensión cabal de ciertos *universales relativos* en matemáticas, que permiten combinar una fundamental pretensión de "universalidad" en la matemática moderna y una modulación hacia lo "relativo" (y hacia la búsqueda de invariantes detrás del tránsito) en la matemática contemporánea. De hecho, muchos trabajos prominentes que hemos venido revisando responden de manera precisa y acotada a la conformación de *redes de universales relativos*: la correspondencia de Langlands [103], la "unidad-e-identidad de opuestos" de Lawvere [109], la teoría general de la dimensión de Shelah [111], la geometría no conmutativa de Connes [126], la cohomología cuántica de Kontsevich [134], las alegorías y categorías intermedias de Freyd [137], las matemáticas en reverso de Simpson [140], la tricotomía extendida de Zilber [145], el *h*-principio de Gromov [149], entre muchos logros. En todos estos casos, que deben verse como expresiones típicas de la matemática contemporánea, se observa, primero, una asimilación plena de la *dinámica* matemática, segundo, una búsqueda de modos de control del movimiento (es decir, modos de definición de *fronteras* adecuadas), y tercero, una construcción de cuasi-objetos acotados y bien conformados técnicamente que –con respecto a las dinámicas y fronteras anteriores– sirven de universales relativos: grupo de Langlands [105], funtores adjuntos [109], líneas divisorias del Main Gap [113], semigrupo de Lax-Phillips [124], grupo de Grothendieck-Teichmüller [128], funtores *Cor-Split-Map* [139], subsistemas canónicos en segundo orden [141], geometrías de Zariski [144], desigualdades suaves e invariantes de Gromov [147], etc.

Desde una perspectiva *metafórica*, la transición entre la matemática moderna y la matemática contemporánea corresponde a un proceso de *liberación* y de *amplitud variacional*, reflejado en la circulación interna de los conceptos y técnicas que hemos venido describiendo. Un profundo "desliz del suelo" [86, 157] ha *liberado* a la matemática. A lo largo de un proceso continuo, se ha recorrido un camino de *ampliación progresiva de la razón/imaginación:* elaboración de un "suelo" para la matemática (reconstrucción analítico-conjuntista de la matemática), percepción del "desliz del suelo" (pruebas de consistencia relativa a la Gödel, matemática relativa a la Grothendieck), comprensión "bimodal" del tránsito matemático (emergencia de la teoría de categorías, resurgimiento de estrechos vínculos con la física), construcción sintético-matemática de "universales relativos". El *punto más alto de la razón* nos permite contemplar así los deslices y sedimentaciones que contribuyen a conformar los terrenos de la matemática contemporánea. Se trata, por supuesto, de una nueva topografía en gestación, a la cual debe asomarse sin más tardar la filosofía de la matemática, rompiendo sus rígidas matrices académicas.

Aunque las modulaciones anteriores deben inscribirse sobre un continuo, es de notar que la progresiva ampliación recién indicada se encuentra también tensionada por vaivenes contrapuntísticos discretos. Por un lado, la *mixturación teoremática –(v)–* ha dado lugar al descubrimiento singular de núcleos geométricos arqueales, dentro de corrientes de *geometrización ubicua –(vii)–* que permiten gobernar en buena medida, desde nuevas perspectivas, las mixturaciones modernas; es aquí patente la tensión entre las mediaciones continuas y los núcleos discretos (motivos, alegorías, semigrupos y grupos combinatorios, geometrías de Zariski, etc.)

desde los cuales parece poder controlarse la mediación. Por otro lado, la *unidad estructural –(iii)–* de la matemática moderna ha ampliado sus *márgenes* hacia una eventual unidad de *fluxión y deformación –(ix)–* donde lo estructural resulta ser solo una *parte* (aunque central) de todo un panorama dinámico más complejo; en esa extensión del *ordenamiento genérico* de las estructuras matemáticas, los saltos discretos (cuantizaciones) se contraponen con las deformaciones continuas, como nueva forma de la aporía de Thom en el panorama de la matemática actual.

Otra transición profunda ayuda a explicar también el "por qué" del deslinde entre matemáticas modernas y matemáticas contemporáneas. La fuerza ascendente de lo *asintótico* –contrapuesto con lo fijado o lo determinado dentro de los *logoi* matemáticos modernos– permea muchas de las formas mayores de la matemática contemporánea. Desde la emergencia de múltiples topos clasificadores y de límites inversos con los cuales pueden "pegarse" los clasificadores –lo que da lugar a una comprensión asintótica de la lógica, algo que se confirma por otros caminos con los resultados de Caicedo en lógica de haces [160]– hasta los grandes barridos asintóticos de Gromov en el árbol de Hilbert [148], pasando por las "aproximaciones cubrientes" de lo que aquí hemos llamado *transformada de Grothendieck* [177-178] o por la riqueza de cubrimientos parciales de lo real en la aproximación *quiddital* de Atiyah, Lax, Connes o Kontsevich, la matemática contemporánea ha sabido expresar y controlar, con suma potencia conceptual y técnica, la noción crucial de *hiato* entre fragmentos del saber. El hiato, entendido como hendidura o fisura, es decir, como un *"entre" en el revés* de nuestras concepciones, sirve a su vez de abertura hacia lo inexplorado, como aparece en *El ojo y el espíritu* según Merleau-Ponty [187]. El *to ti en einai*, "lo esencial de la esencia" [71], no puede ser descrito como un concepto o un "ente" universal, sino precisamente como una forma genérica del hiato, inevitablemente presente tanto en el mundo ("ontología transitoria" – *capítulo 8*), como en nuestra aproximación al mundo ("epistemología comparada y hacificación" – *capítulo 9*). El *cubrimiento parcial, relativo, asintótico* de ese hiato, algo que constituye una de las tareas primordiales de la filosofía, puede empezar a realizarse gracias a toda una serie de conceptos, instrumentos, métodos, ejemplos, propios de la *matemática contemporánea.*

El flujo, el desliz, el hiato nos han envuelto siempre en todas partes. El vívido resurgimiento de Novalis en la cultura contemporánea no es un azar, como no lo es el reconocimiento de la pertinencia actual de la arquitectónica asintótica de Peirce. No parece ser un azar tampoco que el inicio de la matemática contemporánea pueda situarse cerca de la emergencia de la teoría de haces, teoría particularmente sensible, si la hay, al cubrimiento deslizante de ciertas obstrucciones locales. La enorme importancia filosófica de *esta matemática en la que nos hallamos inmersos* radica, en buena medida, en su riquísimo arsenal conceptual y técnico para abordar con creciente cuidado el estudio del flujo, el desliz, el hiato. Como ha subrayado Corfield, "no lo desperdiciemos" [59].

Los cambios y los avances en la matemática de la segunda mitad del siglo XX han sido notables. Hemos visto que las transformaciones corresponden a una ampliación gradual de problemáticas (modulación de *(A)* a *(B)* [197, 198]) y a una capacidad extendida para tratar –con novedosas herramientas técnicas– las deformaciones de los cuasi-objetos matemáticos, los pegamientos entre lo local y lo global, los núcleos geométricos de las representaciones, los procesos de autorreferencia y esquematización, los cauces relativos y asintóticos, los entronques estructurales no clásicos con la física. Detrás de todos estos logros, y de otros tantos no mencionados, se vislumbra la presencia permanente de cierta "operatividad general del TRANS" (*figura 14*) en el trasfondo de la matemática contemporánea. Es interesante observar que, si nos alejamos del corte trillado de los años 1960-1970, asociado al "posmodernismo", y nos acercamos más bien a una *red de entradas y salidas de la modernidad*, a un *recorrer transversal de lo moderno*, es decir, a una suerte de "transmodernidad", las circulaciones *internas* que hemos realizado en la matemática parecen contar con un natural reflejo *externo* dentro de la cultura.

Un aparente quiebre entre la modernidad y la mal llamada "posmodernidad" está constituido por la obra brillante de Deleuze[353]. Sin embargo, más allá de la riqueza de las obras fundadoras del "posmodernismo", muchas de las tesis "degeneradas"[354] posteriores del movimiento –como el "todo vale", el relativismo absoluto, la imposibilidad de la verdad, la conjunción de lo arbitrario, la disolución de las jerarquías, o las defunciones altisonantes del saber, entre otras proposiciones extremas– impiden el ejercicio *crítico y comparativo* de la razón/razonabilidad/ imaginación. Más allá de un traumático y autoproclamado POST por sus

353 De la inmensa literatura primaria y secundaria alrededor de Deleuze, resaltamos algunos textos útiles para la filosofía de la matemática. Philippe Mengue, *Gilles Deleuze ou le système du multiple*, París: Kimé, 1994, resalta el pensamiento deleuziano *sistemático* sobre las mediaciones, imbricaciones y flujos, cuya ocurrencia *dentro* de la matemática tantas veces hemos aquí resaltado. Laurence Bouquiaux et al., *Perspective. Leibniz, Whitehead, Deleuze*, París: Vrin, 2006, estudia la problemática de la multiplicidad de puntos de vista ("perspectiva"), de cómo reintegrarlos parcialmente y de cómo utilizarlos para *actuar* sobre el mundo. Sin haber aprovechado a Leibniz, Whitehead o Deleuze en nuestro ensayo, hemos abordado repetidamente esa problemática gracias a la arquitectónica peirceana, la teoría de categorías y los procesos de "hacificación". Simon Duffy (ed.), *Virtual Mathematics. The Logic of Difference*, Bolton: Clinamen Press, 2006, es una recopilación de artículos sobre la filosofía de Deleuze y su incidencia eventual en la filosofía de la matemática. El volumen III de *Collapse. Philosophical Research and Development*, Falmouth: Urbanomic, 2007, editado por Robin Mackay, incluye una importante serie de artículos "no estándar" sobre Deleuze, donde se enfrenta, entre otras labores, una posible "integración" de las constelaciones diferenciales deleuzianas.

354 "Degenerada" debe entenderse en el sentido de Peirce, es decir, cuya *complejidad relacional* se ve disminuida. Este es el caso de las tesis señaladas, donde se *alisa* el panorama del pensamiento.

alumnos, Deleuze o Foucault nos enseñan, más bien, a *transitar*, a entrar y salir de la modernidad bajo múltiples formas y múltiples perspectivas. Época del TRANS si la ha habido, la segunda mitad del siglo XX incita –más bien– a que se la denomine *transmodernidad*, como lo ha propuesto desde 1987 Rodríguez Magda[355].

Imposible de asociarse a la "pos"-modernidad, la matemática contemporánea parece en cambio cobijarse naturalmente dentro de la *transmodernidad* en la que nos hallaríamos situados. Por un lado, la matemática contemporánea es capaz aún de distinguir valencias, de relativizar discriminadamente, de constituir verdades asintóticas, de conjugar lo coherente, de jerarquizar el saber, en contra de las tesis "degeneradas" "pos"modernas. Por otro lado, la matemática contemporánea se ve recorrida por incesantes ósmosis, contaminaciones, sincretismos, multicronías, enlaces, oscilaciones pendulares, pegamientos coherentes, emergencias de universales relativos, en pleno acople con los procesos *transmodernos*[356]. La riqueza de la matemática contemporánea, *en su avasalladora imaginación técnica*, proporciona una multitud de signos/operadores/mediadores con los cuales se puede observar finamente el tránsito. De hecho, invirtiendo nuestra aproximación, en caso de que la matemática, como ha sucedido a menudo a lo largo de la historia, pudiese servir de indicador para *presagiar* las tendencias de una época, la matemática contemporánea serviría de *introducción* a la transmodernidad que la estaría ahora envolviendo. Así como el Renacimiento puede cifrarse en la perspectiva y en las máquinas geométricas de Leonardo, como el Barroco corresponde al cálculo diferencial e integral de Leibniz, como el Clasicismo se ve presagiado en las manipulaciones en serie de Euler, o

---

355 Rosa María Rodríguez Magda, *Transmodernidad*, Barcelona: Anthropos, 2004. Sin usar el término "transmoderno", los trabajos de García Canclini y de Martín-Barbero se encuentran en sintonía con las constantes salidas y entradas en la modernidad detectadas por Rodríguez Magda; véanse Néstor García Canclini, *Culturas híbridas. Estrategias para entrar y salir de la modernidad* (1989), México: Grijalbo, 2005, y Jesús Martín-Barbero, *De los medios a las mediaciones. Comunicación, cultura y hegemonía* (1987), Bogotá: Convenio Andrés Bello, 1998. La riqueza plural de América Latina (y, más generalmente, del mundo hispánico si englobamos a Rodríguez Magda) ha servido aquí de freno natural a las corrientes "posmodernas", que, curiosamente, *uniformizan* todo en la diferencia.

356 Compárese esta situación con la siguiente cita de Rodríguez Magda, por ejemplo: "La Transmodernidad prolonga, continúa y transciende la Modernidad, es el retorno de algunas de sus líneas e ideas, acaso las más ingenuas, pero también las más universales. El hegelianismo, el socialismo utópico, el marxismo, las filosofías de la sospecha, las escuelas críticas... nos mostraron esta ingenuidad; tras las crisis de esas tendencias, volvemos la vista atrás, al proyecto ilustrado, como marco general y más holgado donde elegir nuestro presente. Pero es un retorno distanciado, irónico, que acepta su ficción útil. (...) La zona contemporánea transitada por todas las tendencias, los recuerdos, las posibilidades; transcendente y aparencial a la vez, voluntariamente sincrética en su "multicronía". (...) La Transmodernidad es lo postmoderno sin su inocente rupturismo (...) La Transmodernidad es imagen, serie, barroco de fuga y autorreferencia, catástrofe, bucle, reiteración fractal e inane; entropía de lo obeso, inflación amoratada de datos; estética de lo repleto y de su desaparición, entrópica, fatal. Su clave no es el post, la ruptura, sino la transubstanciación vasocomunicada de los paradigmas. Son los mundos que se penetran y se resuelven en pompas de jabón o como imágenes en una pantalla", Rodríguez Magda, *Transmodernidad*, op. cit., pp. 8-9.

como la Modernidad no es más que el temple de las visiones de un Galois o un Riemann, la Transmodernidad podría también cifrarse en la plasticidad técnica de la matemática contemporánea, simbolizada a su vez en la figura de Grothendieck.

Si estas asociaciones o "predicciones" pueden llegar a ser medianamente correctas, debemos observar no obstante que, contrariamente a las periodizaciones de la historia del arte utilizadas en los últimos siglos –Renacimiento, Barroco, Clasicismo, Modernismo, Contemporaneidad, épocas donde las formas de expresión artística son *todas* igualmente complejas–, las "épocas" matemáticas están ligadas en cambio a un muy palpable *aumento continuo de complejidad* a lo largo de la evolución histórica. De hecho, las matemáticas "avanzadas", que hemos definido al englobar la técnica matemática desde el Clasicismo [23-24], crecen claramente en complejidad a lo largo de los siglos. Sin duda, la *paulatina dificultad de acceso* a esas formas de expresión matemática, a medida que nos acercamos a nuestra era, ha impedido una cabal comprensión de la matemática *en su conjunto*, desde lo más elemental hasta lo más avanzado. Tarea del filósofo serio de la matemática debe ser, sin embargo, romper esas barreras, y elaborar una concienzuda reflexión sobre la matemática moderna y la contemporánea. Bien pobre sería la tarea del crítico de arte que no estuviese al tanto de lo que ha sucedido en el arte en los últimos ciento cincuenta años. No debe ser distinta la situación en la filosofía de la *matemática*, y debe superarse pronto la "comodidad" de reflexionar meramente sobre la *lógica* (al estilo del *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* [59-61]).

Más allá de las coincidencias que pueden marcarse alrededor de las *delimitaciones* epocales en las artes y en las matemáticas, la cercanía entre los *fondos creativos* artístico y matemático ha sido siempre resaltada a lo largo de la historia de la cultura. El gran crítico e historiador del arte Pierre Francastel señalaba con fuerza cómo las matemáticas y el arte debían entenderse como los *polos mayores del pensamiento* humano[357]. Detrás de esos modos del conocimiento, Francastel observaba a su vez la emergencia de sistemas y *redes creativas* donde se combinan lo real y lo ideal, lo concreto y lo abstracto, lo racional y lo sensible[358].

---

357 "El arte y las matemáticas son los dos polos de todo pensamiento lógico, los modos mayores de pensamiento de la humanidad", en: Pierre Francastel, *La realidad figurativa* (1965), Barcelona: Paidós, 1988, vol. I, p. 24.

358 "Desde el momento en que se acepta la idea de que los signos matemáticos o artísticos responden a un conocimiento intelectualizado y no a un simple dato de los sentidos inmersos únicamente en la materia, se admite también la intervención de una lógica, de un sistema, y se ven aparecer las nociones de orden y de combinación, de equivalencia, de relación, de operación, de transposición. (...) Lo mismo que el matemático combina esquemas de representación y de previsión en los que lo real se asocia a lo imaginario, así el artista confronta elementos de representación con otros que proceden de una problemática de la imaginación. En los dos casos, el dinamismo de un pensamiento que toma conciencia de sí mismo al expresarse y al materializarse en signos-enlace sobrepasa, engloba, los elementos de la experiencia y los de la lógica propia del espíritu. (...) Lo mismo que el arte, las matemáticas poseen un carácter dualista gracias al cual ambos se elevan hasta el último grado de la abstracción, incluso estando anclados en

En la clasificación peirceana triádica de las ciencias, las matemáticas se sitúan en la rama primera (*1*), dentro del ámbito de las construcciones de posibilidad. La estética aparece dentro de la filosofía (segunda), y allí, dentro de las ciencias normativas (segundas), se sitúa en un lugar primero (es decir, en la ramificación *2.2.1*). El "arte" como tal no entra en el ámbito de las ciencias y no se encuentra dentro de la clasificación peirceana, pero podría vérsele como muy cercano a una *materialidad creativa* de tipo *3.2.2* o *3.2.3* (mediaciones materiales para hacer emerger sentido –arte clásico– o acción –arte contemporáneo–). Así, dentro de la clasificación peirceana de las formas del saber (y entendiendo aquí el arte como parte *imprescindible* del saber, algo que no aparece en Peirce), la matemática y el arte emergen también como claras *polaridades* (*1* versus *3.2.3*). Una visión del árbol *desde el revés* nos proporcionaría entonces un posible tránsito entre la matemática y el arte. Por ejemplo, si –metafóricamente– situáramos el árbol sobre la página de aserción de los gráficos existenciales peirceanos y lo miráramos desde el *recto* (gráficos alfa) o desde el *verso* (gráficos gama), podríamos estar transitando entre diversos ámbitos de creación, con *intersticios* de pasaje entre las matemáticas y las artes (cortes punteados gama, puntos de ramificación singulares), pero también con bloqueos entre ellas (cortes estrictos alfa, delimitaciones restrictivas).

La metafórica del árbol y los gráficos posee una profundidad mucho mayor de lo que podría vislumbrarse en primera instancia. En efecto, por un lado, el árbol –como *tejido* triádico– remite a procesos de *construcción iterativa* dentro de la cultura, que se *despliegan* en el tiempo y el espacio. Por su lado, los gráficos –como *imágenes* especulares– remiten a procesos de *visión singular*, que se *repliegan* codificando la información. En el vaivén entre la iteración y la desiteración (que son, a su vez, las reglas lógicas *mayores* de los gráficos existenciales peirceanos) se despliega y repliega entonces la cultura, con sus modos mayores de creación (artes y matemáticas, según Francastel) en permanente diálogo. Las cercanías creativas entre el arte y las matemáticas, claras desde la *emergencia* de la inventividad, se refrendan así desde un punto de vista formal, dual y reticular, dentro de los modos generales del saber.

Un acercamiento está sin embargo muy lejos de una identificación. Las formas creativas en las matemáticas y en las artes conservan sus especificidades diferenciales, y, aunque las polaridades conforman un espacio notable de mediaciones (al igual que dos polos en un campo electromagnético –recuérdese a Châtelet [174]), por supuesto que las polaridades empiezan, ante todo, repeliéndose entre sí. El ámbito demostrativo, acumulativo y arquitectónico (tercero) de las matemáticas se repele naturalmente con el ámbito intuitivo, destructivo y visionario (primero-segundo) del arte. De

lo real. Gracias a eso, tanto el simbolismo matemático como el simbolismo plástico conservan su carácter operativo". Ibíd., pp. 125-126. El carácter "dualista" señalado por Francastel debe entenderse como proceso de *entreveración* "dual" de lo real y lo imaginario, sobre el *relé* [41] de los signos-enlace. La mediación del relé se impone sobre el dualismo de lo positivo y de lo negativo, del más y del menos.

esta manera, aunque los *modos* de creación en ambos ámbitos lleguen a acercarse, los cuasi-objetos en juego son extremadamente distintos. Nos enfrentamos entonces a una muy interesante *geometría asintótica* entre la matemática y el arte: "¿qué?" *ortogonales*, "¿cómo?" *duales*, "¿por qué?" *inversos*.

El hálito estético permea la creatividad matemática en al menos dos niveles, como *detonante* y como *regulador*. Refiriéndose a la imaginación artística, escribe Valéry en sus *Cahiers*: "La imaginación (construcción arbitraria) solo es posible si no se la fuerza. Su verdadero nombre es *deformación del recuerdo de las sensaciones*"[359], y, refiriéndose a la imaginación en general, habla de las "magnitudes imaginarias –*esfuerzos ESPECIALES* cuando hay desplazamientos o tensiones"[360]. Hemos visto cómo la matemática contemporánea estudia, de manera sistemática, las *deformaciones de las representaciones de los conceptos*. En ese estudio, el impulso estético ocurre inicialmente como detonante, como apoyo (dentro de la primeridad peirceana) para la elaboración de una imagen vaga o de una conjetura, que luego el matemático somete a meticulosa contrastación, mediante acotaciones, definiciones, ejemplos, teoremas. A su vez, dentro de esa contrastación (sumida en formas de segundidad y terceridad peirceanas), el impulso estético ocurre como regulador, como funtor de equilibrio, simetría, elegancia, sencillez. La *circulación doble* de factores estéticos y técnicos en el acto creativo en matemáticas es permanente. Pero Valéry subraya además la importancia central, en la imaginación, de *deformaciones, desplazamientos, tensiones*. Por nuestra parte, hemos resaltado abundantemente la presencia de estos movimientos en la matemática contemporánea, cuyas expresiones imaginativas se funden entonces casi *simbióticamente* con las formas más exigentes ("*esfuerzos ESPECIALES*") de la imaginación, según Valéry.

En la práctica matemática misma podemos observar la fuerza de ciertas tensiones estéticas que, si no gobiernan, al menos determinan el *clima* de ciertos fragmentos de la disciplina. Contrapuestas con ciertas ramificaciones fundacionales enmarcadas dentro del árbol de Hilbert, emergen por ejemplo unas improntas de densidad correlativa dentro de las "nubes" de Gromov [148]. Existe una suerte de *metereología estética* que se esconde detrás de la variabilidad de muchos fenómenos matemáticos. La *nubosidad* de Gromov es típica de la matemática contemporánea, y resulta incomprensible –peor aún: invisible– desde perspectivas elementales o, aún, modernas. El árbol estallado de Hilbert (complejidad, indecidibilidad) es a su vez un árbol desplazado, deformado, tensionado, con nodos extraordinariamente densos (explosión y penetración de la variable compleja en los dominios más inesperados de la matemática, por ejemplo) cuya fuerza expansiva –*detonante y reguladora*– se convierte en nuevo objeto de estudio. Las

359 Paul Valéry, *Cahiers 1894-1914*, París: Gallimard, 1990, vol. III, p. 219 (cursivas de Valéry).

360 Ibíd., p. 220 (cursivas y versales de Valéry).

visiones de “cohomologías por doquier” en Grothendieck [84], de “grupos por doquier” en Zilber [144], o de “métricas por doquier” en Gromov [146], responden en el fondo a una nueva sensibilidad estética, abierta a contemplar las variaciones locales de los (cuasi-)objetos mediante entornos globales de transformación de la información. La regulación estética que permite calibrar la invasión de las cohomologías, los grupos o las métricas es determinante.

Adentrándonos en casos particulares, podemos observar algunos complejos solapamientos entre estética y técnica dentro de las matemáticas contemporáneas. Muchos de los ejemplos *combinan* una suerte de detonante romántico (recuérdese la exclamación de Langlands sobre “el *lado romántico* de las matemáticas” [105]) y un entramado regulador transmoderno. El *enlace de romanticismo y transmodernidad*, tal vez sorprendente en primera instancia, lo es menos cuando observamos que muchos grandes románticos –Novalis, Schelling y Goethe en particular– se adentran, por supuesto con herramientas técnicas más frágiles que las contemporáneas, en extensos estudios del TRANS. De entrada, dos de los programas mayores de la matemática contemporánea, la cohomología motívica de Grothendieck y la correspondencia de Langlands, se inscriben explícitamente a partir de impulsos románticos (la “gran visión” de Grothendieck [92], las “matemáticas que *llevan a soñar*” de Langlands [106]), y se *combinan* con extensos entramados de regulación de las deformaciones y deslizamientos transmodernos en juego (EGA [94-95], funtorialidad asociada al grupo de Langlands [105]). En forma más acotada, el *h*-principio de Gromov [149] resulta de una primera intuición romántica global (penetración sintética de las ideas de holonomía y homotopía en ámbitos diferenciales) y de una extensa elaboración posterior de jerarquías de condiciones analíticas locales que permiten “encarnar” al *h*-principio. La visión de las matemáticas, según Lawvere, encaja perfectamente también con una tensión bipolar entre romanticismo y transmodernidad; en su caso, el fondo romántico corresponde a intuiciones dialécticas, al asomarse en los abismos [108], mientras que la riqueza transmoderna de su reflexión se explaya alrededor de una multiplicidad de nuevos cuasi-objetos matemáticos (en particular, los clasificadores de subobjetos y los haces en un topos elemental [111]) que permiten medir las fluxiones y deformaciones entre los opuestos. Shelah asume explícitamente (y tal vez polémicamente) el *rol primordial* de la belleza en su comprensión de la matemática [113], Zilber se hunde en el *hiato abismal* de los enlaces entre teoría de modelos y geometría no conmutativa [145], Connes subraya la necesidad de conocer el *corazón* de las matemáticas [129]: dejos fuertemente románticos, potenciados y reencauzados por las diversas modulaciones migratorias de la transmodernidad.

El “crecimiento continuo de la potencialidad”, *summum bonum* de la estética según Peirce[361], subyace detrás de todos estos ejemplos.

361 Ver Barrena, *La razón creativa*..., op. cit.

Como esperamos haberlo mostrado a lo largo de estas páginas, las matemáticas contemporáneas proveen un notable *crecimiento continuo de la potencialidad y de la razonabilidad*. En plena sintonía con el *summun bonum*, la matemática de las últimas décadas amplía entonces nuestras capacidades técnicas, imaginativas y racionales. Una belleza extendida yace en la obra de los grandes creadores matemáticos contemporáneos. Las matemáticas actuales no solo se aprecian gracias a modos epistémicos, ónticos, fenoménicos y estéticos extendidos, sino que, a su vez, deben ayudar a transformar a la **filosofía**. Una visión **sintética** permite coligar estratos de las **matemáticas** y de la cultura aparentemente distantes, ayudando a romper muchas barreras artificiales. Finalmente, como indica Goethe, no debemos olvidar que "lo más importante sigue siendo, no obstante, lo **contemporáneo**, porque es lo que más nítidamente se refleja en nosotros, y nosotros en él" (nuestro epígrafe). Esperamos que esta *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* ayude a conformar parte de ese reflejo requerido –en honor del espíritu humano– por una de las más asombrosas aventuras del pensamiento en nuestros días.

Bibliografía(*)

A

ARAKI Huzihiro, “The work of Alain Connes”, en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 337-344. [125]

ARDAO Arturo, *Lógica de la razón y lógica de la inteligencia*, Montevideo: Marcha, 2000. [185]

ATIYAH Michael, “The Index of Elliptic Operators” (1973), en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 123-135. [120]

ATIYAH Michael & Singer Isadore, “The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963): 322-433. [118]

__________, “The Index of Elliptic Operators I-V”, *Annals of Mathematics* 87 (1968): 484-604, 93 (1971): 119-149. [118]

B

BADIOU Alain, *L'Être et l'Événement*, París: Seuil, 1988. [53]

__________, *Court traité d'ontologie transitoire*, París: Seuil, 1998. [16, 54, 157-158]

BARRENA Sara, *La creatividad en Charles S. Peirce: abducción y razonabilidad*, Tesis Doctoral, Departamento de Filosofía, Universidad de Navarra, Pamplona, 2003 (publicación parcial de la tesis en: Sara Barrena, *La razón creativa. Crecimiento y finalidad del ser humano según C.S. Peirce*, Madrid: Rialp, 2007). [193, 206]

BARWISE John & Feferman Solomon (eds.), *Model Theoretic Logics*, New York: Springer, 1985. [179]

BATT Noëlle (ed.), *Penser par le diagramme. De Gilles Deleuze à Gilles Châtelet*, *Théorie-Littérature-Enseignement* 22 (2004), Saint-Denis: Presses Universitaires de Vincennes, 2004. [56]

BAUDELAIRE Charles, “L'invitation au voyage”, *Fleurs du mal* (1857). [107]

BAYER Pilar, “Jean-Pierre Serre, Medalla Fields”, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 4 (2001): 211-247. [102]

BÉNABOU Jean, “Rapports entre le fini et le continu”, en: J. M. Salanskis, H. Sinaceur (eds.), *Le Labyrinthe du Continu*, París: Springer-Verlag, 1992, pp. 178-189. [180]

BENACERRAF Paul & Putnam Hilary (eds.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings* (1964), Cambridge: Cambridge University Press, 1983 (second edition). [61, 158]

(*) Entre paréntesis cuadrados, al final de cada referencia bibliográfica, aparece(n) la(s) página(s) del cuerpo del texto donde se menciona la referencia en cuestión.

BERGER Marcel, "Rencontres avec un géomètre" (1998), en: Jean-Michel Kantor (ed.), *Où en sont les mathématiques*, París: Vuibert/Société Mathématique de France, 2002, pp. 399-440. [147]

BERNAYS Paul, "Reviews of Albert Lautman", *Journal of Symbolic Logic* 5 (1940): 20-22. [51]

BLUMEMBERG Hans, *Paradigmas para una metaforología* (1960), Madrid: Trotta, 2003. [190]

___________, *Tempo della vita e tempo del mondo* (1986), Bologna: il Mulino, 1996. [190]

BOUQUIAUX Laurence et al., *Perspective. Leibniz, Whitehead, Deleuze*, París: Vrin, 2006. [201]

BOUSSOLAS Nicolas-Isidore, *L'Être et la composition des mixtes dans le Philèbe de Platon*, París: PUF, 1952. [158]

BRENTANO Franz & Natorp Paul, *Platón y Aristóteles*, Buenos Aires: Quadrata, 2004. [184]

C

CAICEDO Xavier, "Lógica de los haces de estructuras", *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XIX (74) (1995), 569-585. [160]

CARTAN Henri, "L'oeuvre de Michael F. Atiyah" (1966), en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 113-118. [120]

CARTIER Pierre, "A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry", *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series) 38 (2001): 389-408. [128]

CARTIER Pierre et al., *The Grothendieck Festchrift*, Basel: Birkhäuser, 1990. [86]

CASSIN Barbara (ed.), *Vocabulaire européen des philosophies*, París: Seuil, 2004. [89, 157]

CHANG C.C. & Keisler H.J., *Model Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1973. [143]

CHÂTELET Gilles, *Les enjeux du mobile. Mathématiques, physique, philosophie*, París: Seuil, 1993. [56, 174, 176]

CHONG C.T. & Leong Y.K., "An Interview with Jean-Pierre Serre", *Mathematical Medley* 1985. Disponible en: http://sps.nus.edu.sg/~limchuwe/articles/serre.html [101, 102]

COLMEZ Pierre & Serre Jean-Pierre (eds.), *Correspondance Grothendieck-Serre*, París: Société Mathématique de France, 2001. [89-90]

CONNES Alain, "Advice to the beginner". Disponible en: ftp://ftp.alainconnes.org/Companion.pdf [129]

___________, "A short survey of noncommutative geometry" (2000). Disponible en: ftp://ftp.alainconnes.org/shortsurvey.pdf [126]

___________, *Noncommutative geometry*, San Diego: Academic Press, 1994. [126]

CONNES Alain & Marcolli Mathilde, *A walk in the noncommutative garden*. Disponible en: ftp://ftp.alainconnes.org/pardis.pdf [126]

CORFIELD David, *Towards a philosophy of real Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003. [22, 58]

COURTINE Jean-François, "Essence", en: Barbara Cassin (ed.), *Vocabulaire européen des philosophies*, París: Seuil, 2004, pp. 400-414. [157]

D

D'ESPAGNAT Bernard, *Le réel voilé. Analyse des concepts quantiques*, París: Fayard, 1994. [22]

DE LORENZO Javier, *Introducción al estilo matemático*, Madrid: Tecnos, 1971. [25, 48]

__________, *La matemática y el problema de su historia*, Madrid: Tecnos, 1977. [25, 48]

__________, *El método axiomático y sus creencias*, Madrid: Tecnos, 1980. [25]

__________, *Filosofías de la matemática fin de siglo XX*, Valladolid: Universidad de Valladolid, 2000. [25]

DE TIENNE André, *L'analytique de la représentation chez Peirce. La genèse de la théorie des catégories*, Bruxelles: Publications des Facultés Universitaires Saint-Louis, 1996. [99, 162]

DELIGNE Pierre, "Quelques idées maîtresses de l'oeuvre de A. Grothendieck", en : *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle*, Seminaires et Congrès 3, Société Mathématique de France, 1998, pp. 11-19. [82, 85]

DESANTI Jean Toussaint, *Les idéalités mathématiques*, París: Seuil, 1968. [88]

DREIFUS Claudia, "From Budapest to Los Alamos. A Life in Mathematics", *The New York Times* 29-03-2005. Disponible en: http://www.nytimes.com/2005/03/29/science/29conv.html [122]

DUFFY Simon (ed.), *Virtual Mathematics. The logic of difference*, Bolton: Clinamen Press, 2006. [56, 201]

DURAND Stéphane, "Robert Langlands. Un explorateur de l'abstrait", *Québec Science* 2000. Disponible en: http://www.crm.umontreal.ca/math2000-1/pub/langlands.html [106-107]

E

EILENBERG Samuel & MacLane Saunders, "Natural isomorphisms in group theory", *Proc. Nat. Acad. Sci.* 28 (1942): 537-543. [44]

__________, "General theory of natural equivalences", *Trans. Amer. Math. Soc.* 58 (1945): 231-294. [44, 107]

ELEK G., "The Mathematics of Misha Gromov", *Acta Math. Hungar.* 113 (2006): 171-185. [148-149]

F

FEFERMAN Solomon, "For Philosophy of Mathematics: 5 Questions", p. 13, material de clase, http://math.stanford.edu/~feferman/papers/philmathfive.pdf [173]

FERREIRÓS José, "Del neohumanismo al organicismo: Gauss, Cantor y la matemática pura", http://nti.educa.rcanaria.es/fundoro/SR2002_Capitulos/Parte_III/III_1_SR2002_web.pdf [69]

FRANCASTEL Pierre, *La realidad figurativa* (1965), Barcelona: Paidós, 1988. [41, 203]

FREYD Peter & Scedrov André, *Categories, allegories*, Amsterdam: North Holland, 1990. [137, 138]

G

GARCÍA Canclini Néstor, *Culturas híbridas. Estrategias para entrar y salir de la modernidad* (1989), México: Grijalbo, 2005. [202]

GODEMENT Roger, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, París: Hermann, 1958. [161]

Goldstein Catherine & Skandalis George, "An interview with Alain Connes", *EMS Newsletter* 63 (2007): 25-30. [129]

Gray John, "Fragments of the history of sheaf theory", en: *Lecture Notes in Mathematics* 753, New York: Springer, 1979, pp. 1-79. [161]

Gromov Misha, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Boston: Birkhäuser, 1999. [147]

__________, *Partial differential relations*, New York: Springer, 1986. [149]

Gromov M., LaFontaine J. & Pansu P., *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, París: Cedic-Nathan, 1981. [147]

Grothendieck Alexander, "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohoku Math. Journal* 9 (1957): 119-221. [78, 82, 91-95]

__________, *Éléments de Géometrie Algébrique* (con Jean Dieudonné), IV volúmenes (8 partes), París: IHES, 1960-1967. [79, 91, 94, 189, 206]

__________, "Techniques de construction en géométrie analytique I-X", *Séminaire Henri Cartan*, tomo 13, París: Secrétariat Mathématique, 1960-61. [95-96]

__________, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, VII volúmenes (12 partes), Berlín: Springer, 1970-1973 (fascículos originales multicopiados, 1960-1969). [79, 89]

__________, *La longue marche à travers la Théorie de Galois* ("La larga marcha a través de la Teoría de Galois"), 1981, 1800 pp. Disponible en www.grothendieckcircle.org [79]

__________, *Esquisse d'un programme* ("Esbozo de un programa"), 1983, 50 pp. Disponible en www.grothendieckcircle.org [79, 84, 97]

__________, *Les dérivateurs* ("Los derivadores"), 1990, 2000 pp. Disponible en www.grothendieckcircle.org [79]

__________, *Récoltes et semailles* ("Cosechas y siembras"), 1985-86, 1000 pp. Disponible en www.grothendieckcircle.org [58, 79, 84-91]

__________, *La clef des songes* ("La llave de los sueños"), 315 pp. Disponible en www.grothendieckcircle.org [79]

H

Hardy Godfrey Harold, *A Mathematician's Apology*, Cambridge: Cambridge University Press, 1940. [22]

Hilbert David, "On the infinite" (1925), en: Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Cambridge: Harvard University Press, 1967, pp. 367-392. [140]

Hodges Wilfrid, *Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993. [143]

Holton Gerald, "Analisi/sintesi", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1977, vol. I, pp. 491-522. [68, 176]

Houzel Christian, "Histoire de la théorie des faisceaux", en: C. Houzel, *La géométrie algébrique*, París: Albert Blanchard, 2002, pp. 293-304. [161]

Hrushovski Ehud, "A new strongly minimal set", *Annals of Pure and Applied Logic* 62 (1993): 147-166. [144]

Hrushovski Ehud & Zilber Boris, "Zariski Geometries", *Journal of the American Mathematical Society* 9 (1996): 1-56. [144]

J

Jackson Allyn, "*Comme Appelé du Néant* – As If Summoned from the Void: The Life of Alexander Grothendieck", *Notices of the AMS* 51 (numbers 4, 10) (2004): 1037-1056, 1196-1212. [77]

Joyal André & Street Ross, "The geometry of tensor calculus I", *Advances in Mathematics* 88 (1991), 55-112. [131]

K

Kitcher Philip, *The nature of mathematical knowledge*, New York: Oxford University Press, 1983. [50]
Klein Felix, *Le programme d'Erlangen*, París: Gauthier-Villars, 1974. [144]
Kline Morris, *Mathematics: The Loss of Certainty*, New York: Oxford University Press, 1980. [50]
Kontsevich Maxim, "Deformation quantization of Poisson manifolds I", *IHES preprints* M/97/72 (1997). [132]
__________, "Deformation quantization of algebraic varieties", *Letters in Mathematical Physics* 56 (2001): 271-294. [134]
__________, Discurso de recepción en la *Académie des sciences* (2003). Disponible en: http://www.academie-sciences.fr/membres/K/Kontsevich_Maxim_discours.htm [130, 132, 134]
__________, "Feynman diagrams and low-dimensional topology", *First European Congress of Mathematics (Paris 1992)*, Boston: Birkhäuser, 1994, pp. 97-121. [132-133]
__________, "Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry", *Comm. Math. Physics* 164 (1994): 525-562. [133]
__________, "Homological mirror symmetry and torus fibrations", en: K. Fukaya et al., *Symplectic Geometry and Mirror Symmetry*, Singapur: World Scientific, 2001, pp. 203-263. [133]
__________, "Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function", *Comm. Math. Phys.* 147 (1992): 1-23. [131]
__________, "Operads and motives in deformation quantization", *Letters in Mathematical Physics* 48 (1999): 35-72. [134]
__________, "Vassiliev's knot invariants", *Adv. Soviet Math.* 16/2 (1993): 137-150. [133]

L

Lakatos Imre, *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*, Cambridge: Cambridge University Press, 1976. [47]
__________, *Mathematics, Science and Epistemology (Philosophical Papers, vol. II)*, Cambridge: Cambridge University Press, 1978. [47]
Langevin Rémi, "Interview: Mikhael Gromov", en: Jean-Paul Pier (ed.), *Development of Mathematics 1950-2000*, Boston: Birkhäuser, 2000, pp. 1213-1227. [147-148, 155]
Langlands Robert, "Letter to Weil" (1967), 17 pp. Disponible en http://www.sunsite.ubc.ca/ DigitalMathArchive/Langlands/intro.html [103]
__________, "Where Stands Functoriality Today", en: T.N. Bailey & A.W. Knapp, *Representation Theory and Automorphic Forms*, Proc. Symp. Pure Math. 61, Providence: American Mathematical Society, 1997, pp. 457-471. [105]
__________, "Réponse" (Medalla de Oro de la Academia Francesa de Ciencias, 2000). Disponible en http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/misc/gror.ps [106]

Lautman Albert, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. I. Les schémas de structure. II. Les schémas de genèse*, París: Hermann, 1938 (2 vols.). [36]

__________, *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*, París: Hermann, 1938. [38]

__________, *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques*, París: Hermann, 1939. [38]

__________, "La pensée mathématique", *Bulletin de la Société Française de Philosophie* XL (1946), 3-17. [39, 44]

__________, *Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique*, París: Hermann, 1946. [40]

__________, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, París: 10/18, 1977. [36, 40-42, 158]

__________, *Les Idées, les mathématiques et le Réel physique*, París: Vrin, 2005. [24]

Lawvere William, "Adjointness in Foundations", *Dialectica* 23 (1969): 281-296. [108]

__________, "Continuously variable sets; algebraic geometry = geometric logic", en: *Proceedings of the Logic Colloquium 1973*, Amsterdam: North-Holland, 1975, pp. 135-156. [107]

__________, "Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories", en: *Lecture Notes in Mathematics* 92, New York: Springer, 1969, pp. 134-145. [110]

__________, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Ph.D. Thesis, Columbia, New York, 1963 (resumen en *Proc. Nat. Acad. Sci.* 50 (1963): 869-872). [107]

__________, "Introduction", en: *Proceedings of the Halifax Conference on Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, New York: Springer, 1972, pp. 1-12. [107, 111]

__________, "Quantifiers and Sheaves", en: *Actes du Congrès international des mathématiciens 1970*, París: Gauthier-Villars, 1971, pp. 329-334. [110]

__________, "Some thoughts on the future of Category Theory", en: *Proceedings of the Como Meeting on Category Theory*, New York: Springer, 1991, pp. 1-13. [108-110]

Lax Peter & Phillips Ralph, *Scattering Theory*, New York: Academic Press, 1967. [124]

__________, *Scattering Theory for Automorphic Functions*, Annals of Mathematics Studies 87, Princeton: Princeton University Press, 1976. [124]

__________, "Scattering Theory for Automorphic Functions", *Bulletin of the American Mathematical Society* New Series 2 (1980): 261-295. [125]

Llull Ramon, *Libro del ascenso y descenso del entendimiento* (1304), Madrid: Orbis, 1985. [177]

Lolli Gabriele, *Filosofia della matematica. L'ereditá del novecento*, Bologna: il Mulino, 2002. [14]

M

Mackay Robin (ed.), *Collapse. Philosophical Research and Development*, Volumes I-III, Falmouth: Urbanomic, 2007. [201]

MacLane Saunders, *Mathematics. Form and function,* New York: Springer, 1986. [52]

Maddy Penelope, *Realism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1990. [55]

__________, *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1997. [55]

Martín-Barbero Jesús, *De los medios a las mediaciones. Comunicación, cultura y hegemonía* (1987), Bogotá: Convenio Andrés Bello, 1998. [202]

Melville Herman, *Moby Dick* (1849-51), (eds. H. Hayford, H. Parker, G.T. Tanselle), Evanston and Chicago: Northwestern University Press and The Newberry Library, 1988. [145]

Mengue Philippe, *Gilles Deleuze ou le système du multiple*, París: Kimé, 1994. [201]

Merleau-Ponty Maurice, *La prose du monde*, París: Gallimard, 1969. [157]

__________, *Le visible et l'invisible*, París: Gallimard, 1964. [157]

__________, *L'oeil et l'esprit* (1961), París: Gallimard, 1964. [86, 157, 187]

__________, *Notes des cours du Collège de France* (1958-59, 1960-61), París: Gallimard, 1996. [86, 157, 187-188]

N

Nelson Edward, "Mathematical Mythologies", en: J. M. Salanskis, H. Sinaceur (eds.), *Le labyrinthe du continu*, París: Springer-Verlag, 1992, pp. 155-167. [180]

O

Otte Michael & Panza Marco, *Analysis and synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Dordrecht: Kluwer, 1997. [176]

P

Palombi Fabrizio, *La stella e l'intero. La ricerca di Gian-Carlo Rota tra matematica e fenomenologia*, Torino: Boringhieri, 2003. [52, 191]

Patras Frédéric, *La pensée mathématique contemporaine*, París: PUF, 2001. [57]

Peirce Charles Sanders, *Collected Papers*, Harvard: Harvard University Press, 1931-1958 (reedición: Bristol: Thoemmes Press, 1998). [65]

Petitot Jean, "Locale/globale", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1979, vol. 8, pp. 429-490. [167]

__________, *Pour un schématisme de la structure*, Tesis Doctoral, París: EHESS, 1982, 4 vols.; publicación parcial en: *Morphogenèse du sens*, París: PUF, 1985. [156]

__________, "The neurogeometry of pinwheels as a subriemannian contact structure", *Jour. Physiol.* 97 (2003): 265-309. [156]

__________, "Unità delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1982, vol. 15, pp. 1034-1085. [167]

__________, "Vers une neuro-géométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines* 145 (1999): 5-101. [156]

Petitot Jean et al., *Naturaliser la phénoménologie*, París: Éditions CNRS, 2002. [173]

Poizat Bruno, "Autour du théorème de Morley", en: Jean-Paul Pier (ed.), *Development of Mathematics 1950-2000*, Boston: Birkhäuser, 2000, pp. 879-896. [143-144]

__________, *A course in Model Theory. An introduction to contemporary Logic*, New York: Springer, 2000. [143]

Pólya George, *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton: Princeton University Press, 1954. [46]

__________, *Mathematical discovery*, New York: Wiley, 1962. [47]

Prévost Jean & Valéry Paul, *Marginalia, Rhumbs et autres*, París: Editions Léo Scheer, 2006. [183]

Proust Marcel, *À la recherche du temps perdu* (ed. Jean-Yves Tadié), París: Gallimard, 1997. [90]

R

Raussen Martin & Skau Christian, "Interview with Jean-Pierre Serre", *Notices AMS* 51 (2004): 210-214. [101]

__________, "Interview with Michael Atiyah and Isadore Singer", *Notices AMS* 52 (2005): 225-233. [121]

__________, "Interview with Peter D. Lax", *Notices AMS* 53 (2006): 223-229. [123-124]

Resnik Michael, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Oxford University Press, 1997. [16]

Rodríguez Magda Rosa Mª., *Transmodernidad*, Barcelona: Anthropos, 2004. [30, 202]

Rota Gian-Carlo, *Indiscrete thoughts*, Basel: Birkhäuser, 1997. [52, 162]

S

Schlegel Friedrich, "Fragmentos" (*circa* 1800), en: Javier Arnaldo (comp.), *Fragmentos para una teoría romántica del arte*, Madrid: Tecnos, 1987, p. 227. [110]

Serre Jean-Pierre, "Faisceaux algébriques cohérents", *Annals of Mathematics* 61 (1955): 197-278. [101]

__________, "Géométrie algébrique et géométrie analytique", *Ann. Inst. Fourier* 6 (1956): 1-42. [101-102]

Servois Julien, *Paul Natorp et la théorie platonicienne des Idées*, Villeneuve d'Ascq: Presses Universitaires du Septentrion, 2004. [184]

Shapiro Stewart, *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2000. [14]

__________, (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, 2005. [35, 59-62, 183, 203]

Shelah Saharon, *Cardinal Arithmetic*, Oxford: Oxford University Press, 1994. [114]

__________, *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, Amsterdam: North-Holland, 1990. [111]

__________, "The Future of Set Theory" (2002), http://arxiv.org/pdf/math.LO/0211397.pdf [113]

__________, *Proper and improper forcing*, Amsterdam: North Holland, 1992. [114]

Simpson Stephen G., "Friedman's research on subsystems of second order arithmetic", en: L. Harrington et al., *Harvey Friedman's Research in the Foundations of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1985, pp. 137-159. [140]

__________, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, New York: Springer, 1999. [26, 141-142].

Soulé Christophe, "The work of Vladimir Voevodsky", en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 769-772. [146]

T

Tao Terence, "What is good mathematics?", preprint, arXiv:math.HO/0702396v1 13 Feb 2007. [146]

Taubes Clifford Henry, "The work of Maxim Kontsevich", en: M. Atiyah, D. Iagolnitzer (eds.), *Fields Medallists' Lectures*, New Jersey: World Scientific, 2003, pp. 703-710. [130]

Thom René, "L'anteriorité ontologique du continu sur le discret", en: J. M. Salanskis, H. Sinaceur (eds.), *Le labyrinthe du continu*, París: Springer-Verlag, 1992, pp. 137-143. [180]

__________, "L'aporia fondatrice delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, Torino: Einaudi, 1982, pp. 1133-1146. [79]

Thuillier Jacques, *Théorie générale de l'histoire de l'art*, Paris: Odile Jacob, 2003. [41]

Tymoczko Thomas (ed.), *New directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston: Birkhäuser, 1986. [51]

V

Valéry Paul, *Cahiers*, París: Editions du CNRS (edición facsimilar, 29 tomos), 1957-1961; *Cahiers 1894-1914*, París: Gallimard (edición crítica, 9 tomos por el momento), 1987-2003; *Cahiers*, París: Gallimard / Pléiade (antología temática, 2 tomos), 1973-1974. [183, 205]

Vaz Ferreira Carlos, *Lógica viva*, Caracas: Biblioteca Ayacucho, 1979. [185]

Villaveces Andrés, "La tensión entre teoría de modelos y análisis matemático: estabilidad y la exponencial compleja", *Boletín de Matemáticas* Nueva Serie XI (2004): 95-108. [113]

W

Weil André, "Numbers of solutions of equations in finite fields", *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949): 497-508. [80]

Wetz Franz Josef, *Hans Blumemberg. La modernidad y sus metáforas*, Valencia: Edicions Alfons el Magnànim, 1996. [190]

Wilder Raymond L., *Mathematics as a cultural system*, Oxford: Pergamon Press, 1981. [16, 49]

Wittgenstein Ludwig, *Lectures on the Foundations of Mathematics* (1939), Chicago: University of Chicago Press, 1989. [26]

Y

Yoneda Nobuo, "Note on products in *Ext*", *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958): 873-875. [139]

Z

Zalamea Fernando, *El continuo peirceano*, Bogotá: Universidad Nacional, 2001. [171, 180]

__________, "Ostruzioni e passaggi nella dialettica continuo/discreto: il caso dei grafi esistenziali e della logica dei fasci", *Dedalus. Rivista di Filosofia, Scienza e Cultura - Università di Milano* 2 (2007): 20-25. [160]

Zilber Boris, "Noncommutative geometry and new stable structures" (preprint 2005, disponible en: http://www2.maths.ox.ac.uk/~zilber/publ.html). [145]

___________, "Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero", *Annals of Pure and Applied Logic* 132 (2004): 67-95. [145]

___________, "The structure of models of uncountably categorical theories", en: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Varsovia 1983), Varsovia: Polish Scientific Publications, 1984, pp. 359-368. [144]

___________, "Totally categorical theories, structural properties, and the non-finite axiomatizability", en: L. Pacholski et al., *Proceedings of the Conference on Applications of Logic to Algebra and Arithmetic* (Karpacz, 1979), Berlin: Springer, 1980, pp. 380-410. [143]

Índice onomástico

Índice de materias(*)

(*) Las entradas y sub-entradas matemáticas se organizan siguiendo la *2000 Mathematics Subject Classification* (*2000 MSC*, en uso por *Mathematical Reviews* y *Zentralblatt Math*). Los números asignados a los temas principales dentro de la *2000 MSC* se señalan aquí entre corchetes cuadrados en cursivas *[ ]*.

K

L

M

N

O

Esta edición consta de 300 ejemplares,
se armó en caracteres Rotis Serif
y se imprimió en la
Editorial Universidad Nacional de Colombia,
Sede Bogotá, 2009.